

Applicazione del teorema di Bayes a un problema di interesse archeoastronomico

Stefano Spagocci
SMS Consulting
Cinisello Balsamo (MI)
Email: scimodsim@gmail.com

Adriano Gaspani
S.E.A.C. – European Society for Cultural Astronomy
S.I.A. – Società Italiana di Archeoastronomia
Milano
E-mail: adriano.gaspani.astro@gmail.com

Abstract - Un recinto ellittico ai Piani d’Avaro (Val Brembana, BG) è stato esaminato dal punto di vista archeoastronomico. A causa di precedenti studi da parte di Gaspani, le sue strutture interne erano note per essere astronomicamente allineate - si sospettava risalissero all’età del Ferro - ma il recinto esterno era ritenuto basso-medievale. Utilizzando un algoritmo di datazione, concepito dagli autori, è stato confermato che il sito è astronomicamente allineato. Si segnalano diversi allineamenti lunari e solari, tra i quali citiamo quelli all’alba e al tramonto nei giorni delle quattro principali feste celtiche. Siamo in grado di affermare che il sito ebbe due fasi. Nella prima fase, 510±20 a.C., fu eretta e allineata la struttura interna. Nella seconda fase, 340±20 a.C., la struttura interna fu riallineata e il recinto ellittico eretto e allineato. Un’innovativa applicazione del teorema di Bayes ci ha permesso poi di stimare la probabilità che il recinto sia stato dimensionato da una sacerdotessa; tale probabilità è risultata essere del (55±8)%. Ciò suggerisce che, con una probabilità del (72±8)%, in Gallia Cisalpina vi fossero "druidi" (nello stesso senso che nel resto dell’Europa celtica?) sia maschi che femmine. Più significativamente, il Bayes factor, maggiore di $\sim(5.7\pm 0.8)$ secondo la scala di Kass e Raftery, suggerisce che le misure del sito diano un’evidenza “più che sostanziale” della presenza di “druidesse” in Gallia Cisalpina.

Introduzione

Il Barec di Monte Avaro (Fig.1) è un recinto ellittico sito in Val Brembana (BG). Grazie a precedenti studi di uno degli autori (Gaspani 2001), le sue strutture interne erano note per essere allineate astronomicamente e risalire probabilmente all’età del Ferro; il recinto vero e proprio, però, si pensava risalisse al basso medioevo. La struttura è stata rimisurata e analizzata dagli autori e i risultati sono andati oltre le loro aspettative; è stato infatti possibile datare il sito ma anche leggere le diverse fasi della sua costruzione e ottenere indicazioni sul genere del suo progettista (Gaspani e Spagocci 2018, 2020, 2022). In questo lavoro daremo un resoconto di tali studi, in particolare occupandoci quantitativamente delle applicazioni del teorema di Bayes al problema da noi affrontato. Di seguito, gli errori sono espressi come limiti di confidenza al 95%.

Allineamenti del sito

Abbiamo constatato la presenza di allineamenti lunari e stellari. Gli allineamenti lunari sono stati controllati utilizzando il programma di simulazione *SkyMap*. Per quanto riguarda gli allineamenti stellari, abbiamo controllato 144 target - le stelle al di sopra della terza magnitudine visibili dalla nostra latitudine - utilizzando il simulatore *Rigel*, scritto in Fortran da Gaspani. La struttura è stata misurata stabilendo una base GPS e riferendo poi ad essa le misurazioni compiute con l’ausilio della bussola. Per alcune misurazioni si è anche impiegato *Google Earth*. Per una descrizione della procedura si veda (Cernuti e Gaspani 2006). In Fig.2 sono mostrati gli allineamenti trovati (Gaspani e Spagocci 2018, 2020).

Le coordinate del centro dell'ellisse che approssima il profilo del recinto, misurate con *Google Earth*, sono:

- Latitudine: 46° 00' 37.90" N
- Longitudine: 9° 35' 51.23" E
- Altezza (ellissoide WGS84): 1761 m

Il profilo della struttura è stato approssimato da un'ellisse, descritta dal seguente insieme di parametri:

- Semiasse maggiore: 32.30 m
- Semiasse minore: 23.42 m
- Eccentricità: 0.69

L'azimut degli assi dell'ellisse è stato misurato con *Google Earth*, con il risultato:

- Semiasse maggiore (AC): $(159.0 \pm 0.4)^\circ$
- Semiasse maggiore (CA): $(339.0 \pm 0.4)^\circ$
- Semiasse maggiore (BD): $(249.0 \pm 0.6)^\circ$
- Semiasse maggiore (DB): $(69.0 \pm 0.6)^\circ$

L'azimut delle linee astronomicamente significative, formate dai monoliti interni, è stato invece misurato sul campo da una squadra guidata da Gaspani, con il risultato:

- Linea EF: $(141.7 \pm 0.5)^\circ$
- Linea FG: $(220.5 \pm 0.8)^\circ$

Gli assi dell'ellisse sono risultati orientati verso i seguenti target:

- AC: Levata eliacca di Fomalhaut (20 aprile)
- BD: Primo tramonto mattutino di Rigel (30 ottobre)

Sono stati inoltre trovati i seguenti allineamenti solari a date compatibili con le principali feste celtiche:

- DB: Alba a Beltane e Lughnasad
- BD: Tramonto a Imbolc e Samhain

Sono stati trovati anche allineamenti alle posizioni estreme della Luna:

- EF: Luna sorge a $\delta=(-\varepsilon-i)$
- FG: Luna tramonta a $\delta=(-\varepsilon-i)$

L'algoritmo di datazione

Con l'obiettivo di datare questa e altre strutture, abbiamo concepito un algoritmo basato sugli allineamenti astronomici (Gaspani e Spagocci 2022). Nel nostro algoritmo si definisce un intervallo di tempo, centrato sul tempo reale dell'allineamento in esame, in cui un antico astronomo potrebbe aver individuato l'allineamento. Gli osservatori antichi, infatti, a causa della limitata precisione delle misure non sarebbero stati in grado di distinguere le reali posizioni estreme di un astro da quelle aventi un azimut situato entro una certa banda di tolleranza. Per tenerne conto viene definita una tolleranza per l'azimut; gli allineamenti, quindi, sono verificati in un intervallo di

tempo centrato sull'anno in cui si verifica la posizione estrema e la cui larghezza è data da alcuni anni (echi), il cui numero deve essere determinato dalla simulazione.

L'algoritmo si basa sull'osservazione che nel caso di un manufatto non astronomicamente orientato, cioè orientato a caso, esiste una certa probabilità che uno o più degli allineamenti architettonici punti ad uno dei possibili target astronomici. Si ha così un fondo statistico di pseudo-eventi, nel senso che per ogni intervallo temporale considerato vi sarà un certo numero di apparenti allineamenti che fluttuerà da intervallo a intervallo, secondo una distribuzione gaussiana il cui valor medio e deviazione standard abbiamo calcolato in (Gaspani e Spagocci 2022). Gli allineamenti veri emergeranno quindi dal fondo statistico, dando origine a picchi il cui profilo si è determinato essere approssimativamente gaussiano.

La datazione del manufatto corrisponde al punto di massimo del picco e la larghezza della relativa gaussiana dà l'errore sulla datazione. È possibile calcolare, sulla base della distribuzione di Poisson, la probabilità che una fluttuazione casuale simuli un picco di ampiezza pari a quella osservata. Sono ritenuti affidabili quei picchi che danno una probabilità di essere fluttuazioni statistiche minore del 5%. Ponendo in grafico la probabilità di fluttuazione statistica rispetto al tempo si ottiene un plot equivalente a quello ottenuto ponendo in grafico il numero di allineamenti rispetto al tempo, eccettuato il fatto che la datazione del manufatto in questo caso è segnalata da un picco invertito.

Una strategia sensata per gli allineamenti lunari si è rivelata essere quella di esaminare i cinque anni prima e dopo l'anno in cui si verifica la vera posizione estrema. A causa del numero limitato di target – otto, le posizioni estreme della Luna – è possibile controllare manualmente gli allineamenti, utilizzando un programma di simulazione quale *SkyMap*.

Gli allineamenti stellari, in linea di principio, potrebbero essere trattati allo stesso modo; tuttavia, la dimensione del campione per alcune stelle bersaglio è troppo piccola per un'analisi statistica. Per ovviare a questa difficoltà è stato adottato un approccio diverso; il simulatore *Rigel* è stato infatti utilizzato per elencare gli allineamenti con le 144 stelle visibili dalla nostra latitudine, la cui magnitudine visuale è maggiore della terza. *Rigel*, basato su un sistema neuro-fuzzy, fornisce l'elenco degli allineamenti dei bersagli specificati con le 144 stelle più visibili; viene calcolata anche l'energia della rete neurale, l'energia essendo definita come la somma dei quadrati degli errori di allineamento tra ogni linea architettonica e ogni stella bersaglio.

Datazione delle strutture

In Fig.3 e Fig.4 sono riportate le curve di datazione ottenute rispettivamente per l'ellisse del recinto e le sue strutture interne (Gaspani e Spagocci 2018, 2020). Le curve di datazione sono state ottenute applicando il nostro algoritmo con una tolleranza sugli allineamenti di $\pm 0.5^\circ$ (tale valore si giustifica considerando due pali aventi diametro di 5 cm e posti a 10 m di distanza, in ogni caso si è constatato che le datazioni non sono sensibili al valore preciso della tolleranza).

La curva di datazione della struttura interna per allineamenti lunari (Fig.3) mostra due picchi al 510 ± 20 a.C. e 340 ± 20 a.C., con probabilità di casualità dello 0.03%. La curva di datazione della struttura esterna per allineamenti stellari (Fig.4) mostra due picchi al 600 ± 100 a.C. e 320 ± 140 a.C., con probabilità di casualità dello 0.7%. Le date calcolate per le strutture interne ed esterne sono statisticamente compatibili; ne abbiamo quindi calcolato la media. Sulla base di queste considerazioni, affermiamo che il sito fu astronomicamente allineato ed ebbe due fasi di costruzione. Nella prima fase, 510 ± 20 a.C., fu eretta e allineata la struttura interna. Nella seconda fase, 340 ± 20 a.C., il recinto esterno fu eretto e allineato.

La probabilità di casualità per gli allineamenti è risultata essere dello 0.7%. Le datazioni proposte ci sembrano ragionevoli, in quanto la probabilità di casualità è molto inferiore al 5% e le datazioni lunari sono statisticamente compatibili con quelle solari. La datazione del sito ci ha quindi consentito di realizzare una “stratigrafia archeoastronomica”, essendosi potute accertare due fasi costruttive per il sito.

L'algoritmo di ottimizzazione

Abbiamo anche ideato un algoritmo (Gaspani e Spagocci 2020) per stimare l'unità di misura utilizzata per il dimensionamento della struttura. Ciò è stato fatto considerando che il rapporto a/b dell'ellisse con cui si approssima il profilo del recinto (Fig.2) è vicino a 4/3, per cui la terna pitagorica (3,4,5) è stata probabilmente impiegata per dimensionare il sito.

Sommando le misure del semiasse maggiore dell'ellisse, del suo semiasse minore e della diagonale del relativo triangolo pitagorico e dividendo il risultato per 12, si ottiene un multiplo dell'unità di misura probabilmente usata per dimensionare la struttura. Il risultato, nel nostro caso, è stato 7.97 m. Una volta ottenuto il multiplo dell'unità di misura, si deve scegliere tra i suoi possibili sottomultipli. A tale riguardo, l'algoritmo trova il sottomultiplo che, moltiplicato per un numero intero, approssima in modo più accurato il perimetro del triangolo pitagorico.

L'ottimizzazione ha dato come risultato un'unità di misura pari a 0.50 m; questo è un valore ragionevole, a condizione che i costruttori abbiano materializzato il triangolo pitagorico mediante una corda con un numero di segmenti (delimitati da nodi) multiplo di 12, disposti a triangolo rettangolo con lati multipli di 3, 4, 5.

Abbiamo poi considerato la possibilità che, invece di una corda con nodi, siano stati utilizzati passi umani per dimensionare il triangolo pitagorico. Esiste una relazione tra la lunghezza del passo e l'altezza di un essere umano, in quanto l'altezza è pari, con un'approssimazione del 10%, al doppio della lunghezza del passo (Maddalena 2010); le lunghezze di passo compatibili con l'altezza di un umano sono risultate rispettivamente 0.89 m e 0.80 m. L'altezza della persona che ha dimensionato l'ellisse potrebbe quindi essere pari a 1.78 m o 1.60 m.

Tracciato da una “druidessa”?

Partendo dalle considerazioni di cui sopra, abbiamo ideato un algoritmo per calcolare la probabilità che la persona che ha dimensionato l'ellisse appartenga a un determinato genere, facente uso del teorema di Bayes (Stone 2013). L'idea di svolgere tali calcoli è stata ispirata dalla considerazione che mentre l'altezza di 1.60 metri sembrava compatibile con una donna, quella di 1.78 metri sembrava compatibile con un uomo.

Calcoliamo, prima di tutto, la probabilità condizionata che una donna abbia tracciato il sito, ammesso che esso abbia le dimensioni misurate, $P(pw|ms)$. Per il calcolo è necessario conoscere le probabilità condizionate che il sito sia stato realizzato con le misure determinate, ammesso che sia stato dimensionato da una donna, $P(ms|pw)$, o un uomo, $P(ms|pm)$, e le probabilità a priori che il sito sia stato dimensionato da una donna (P_{pw}) o un uomo (P_{pm}):

$$P(pw|ms) = \left(1 + \frac{P(ms|pm)}{P(ms|pw)} \frac{P_{pm}}{P_{pw}}\right)^{-1} \quad (1)$$

Per “lasciar parlare i fatti”, le due probabilità a priori sono state poste uguali a ½ e si ha dunque:

$$P(pw|ms) = \left(1 + \frac{P(ms|pm)}{P(ms|pw)}\right)^{-1} \quad (2)$$

Le probabilità $P(ms|pw)$ e $P(ms|pm)$ possono essere calcolate a condizione che si conosca la distribuzione in altezza di uomini e donne nel VI-IV secolo a.C., periodo al quale abbiamo datato il sito. In (Koepke e Baten 2005) è stata calcolata la distribuzione delle altezze per gli uomini e le donne europei tra il I e il XVIII sec. d.C. In mancanza di dati più specifici, abbiamo assunto come altezze medie quelle relative al periodo I-V sec. d.C., assunzione ragionevole poiché, come riferiscono Koepke e Baten l'altezza media risulta essere variata poco fino alle soglie dell'era moderna, eccezion fatta per l'apporto germanico nell'Alto Medioevo. Le altezze medie sono state

calcolate in $h_w=160\pm 6$ cm per le donne e $h_m=171\pm 6$ cm per gli uomini e la distribuzione delle altezze è risultata approssimativamente gaussiana.

Riguardo al calcolo di $P(ms|pw)$ e $P(ms|pm)$, osserviamo che tali termini contengono due contributi, poiché le soluzioni sub-ottimali da noi trovate ci fanno pensare a passi (*steps*) usati come unità di misura mentre la soluzione ottimale suggerisce che si sia impiegata una corda (*rope*) divisa in 12 segmenti uguali, tale da formare un triangolo rettangolo con i lati in proporzione 3:4:5. Per un dato genere g , quindi, applicando la definizione di probabilità condizionata si ha:

$$P(ms|pg) = P(st \vee rp|pg) = P(st|pg) + P(rp|pg) \quad (3)$$

ove i termini dell'ultima uguaglianza rappresentano la probabilità che il sito sia stato tracciato prendendo la lunghezza di un passo come unità di misura o impiegando una corda divisa in 12 segmenti uguali.

Il supporre che la struttura sia stata tracciata da una persona di un dato genere non dice nulla sulla probabilità che sia stata utilizzata una corda con nodi, quindi $P(rp|pw)=P(rp|pm)=\frac{1}{2}$. D'altra parte, $P(st|pw)$ e $P(st|pm)$ si calcolano integrando le distribuzioni in altezza di donne e uomini, tenuto conto del fatto che le altezze $h_1=160$ cm e $h_2=178$ cm, dedotte dall'unità di misura impiegata nel sito, nota con la precisione del cm, risultano dunque determinate con la precisione di $\delta=2$ cm. A partire dalle Eq. (2) e (3) si ha dunque:

$$P(pw|ms) = \left(\frac{1 + \frac{2\delta}{\sigma_m \sqrt{2\pi}} \left(\exp\left(\frac{-(h_1 - h_m)^2}{2\sigma_m^2}\right) + \exp\left(\frac{-(h_2 - h_m)^2}{2\sigma_m^2}\right) \right)}{1 + \frac{2\delta}{\sigma_w \sqrt{2\pi}} \left(\exp\left[\frac{-(h_1 - h_w)^2}{2\sigma_w^2}\right] + \exp\left(\frac{-(h_2 - h_w)^2}{2\sigma_w^2}\right) \right)} \right)^{-1} \quad (4)$$

ove σ_w e σ_m sono la deviazione standard della distribuzione in altezza di donne e uomini (entrambe pari a 3 cm) e si è tenuto conto del fatto che δ è molto minore di h_1 , h_2 , h_w e h_m . Inserendo i dovuti valori nella precedente equazione, la probabilità che una donna abbia dimensionato il sito risulta essere $(55\pm 8)\%$. La barra d'errore è stata ottenuta numericamente, variando h_1 e h_2 .

“Druidesse” in Gallia Cisalpina? Parte I

Abbiamo anche impiegato il teorema di Bayes per stimare la probabilità che “druidi” di entrambe i generi fossero presenti in Gallia Cisalpina. A tal fine calcoliamo prima di tutto la probabilità condizionata che in Gallia Cisalpina vi siano state “druidesse” oltre che “druidi”, ammesso che il sito sia stato tracciato da una donna, $P(wd|pw)$. Per il calcolo è necessario conoscere le probabilità condizionate che il sito sia stato tracciato da una “druidessa”, ammesso che in Gallia Cisalpina vi siano stati “druidesse” e “druidi”, $P(pw|wd)$, o solo “druidi”, $P(pw|md)$, e le probabilità a priori che in Gallia Cisalpina vi siano stati “druidi” di entrambe i generi, (P_{wd}), o solo maschi, (P_{md}). Si ha:

$$P(wd|pw) = \left(1 + \frac{P(pw|md)}{P(pw|wd)} \frac{P_{md}}{P_{wd}} \right)^{-1} \quad (5)$$

Assumiamo quindi la seguente parametrizzazione:

$$\frac{P(pw|md)}{P(pw|wd)} = \epsilon \quad (6)$$

ove con ϵ si indica una quantità infinitesima, in quanto se in Gallia Cisalpina ci fossero stati solo

“druidi” maschi, il fatto che il sito fosse stato tracciato da una donna sarebbe una “fluttuazione locale”.

Per quanto riguarda le probabilità a priori, assumiamo:

$$\begin{aligned} P_{wd} &= P(pw|ms) \\ P_{md} &= 1 - P(pw|ms) \end{aligned} \quad (7)$$

e dall'Eq. (5) otteniamo:

$$P(wd|pw) = \frac{P(pw|ms)}{P(pw|ms) + \epsilon(1 - P(pw|ms))} \quad (8)$$

Per quanto riguarda la probabilità condizionata che in Gallia Cisalpina vi siano state “druidesse” oltre che “druidi”, ammesso che il sito sia stato tracciato da un uomo, $P(wd|pm)$, analogamente alle equazioni precedenti si ha:

$$P(wd|pm) = \left(1 + \frac{P(pm|md)}{P(pm|wd)} \frac{P_{md}}{P_{wd}}\right)^{-1} \quad (9)$$

Assumendo la parametrizzazione:

$$\frac{P(pm|md)}{P(pm|wd)} = \mu \quad (10)$$

analogamente all'Eq. (8) si ha:

$$P(wd|pm) = \frac{P(pw|ms)}{P(pw|ms) + \mu(1 - P(pw|ms))} \quad (11)$$

con:

$$\mu = 2 \quad (12)$$

ove il fattore 2 è dovuto al fatto che $P(pm|wd)=1/2$, in quanto il supporre che in Gallia Cisalpina ci siano stati “druidi” di entrambe i generi non ci fornisce alcuna informazione riguardo al genere di chi abbia tracciato la struttura ed, essendo ragionevole assumere che la struttura sia stata tracciata da un “druido”, nel caso maschile si ha $P(pm|md)=1$.

Siamo finalmente in grado di calcolare la probabilità che in Gallia Cisalpina vi siano state tanto “druidesse” che “druidi”, $P(wd)$. Applicando la definizione di probabilità condizionata, infatti, si ha:

$$P(wd) = P(wd|pw) P(pw) + P(wd|pm) P(pm) \quad (13)$$

ove per le probabilità a priori assumiamo:

$$\begin{aligned} P_{pw} &= P(pw|ms) \\ P_{pm} &= 1 - P(pw|ms) \end{aligned} \quad (14)$$

analogamente all'Eq. (7).

Combinando le Eq. (8), (11) e (12) mediante le Eq. (13) e (14) e tenendo conto del fatto che

ϵ è un parametro infinitesimo, otteniamo infine:

$$P(wd) = P(pw|ms) \frac{3 - 2P(pw|ms)}{2 - P(pw|ms)} \quad (15)$$

Inserendo i dovuti valori nella precedente equazione, la probabilità che in Gallia Cisalpina vi fossero sacerdotesse oltre che sacerdoti (se “druidesse” e “druidi” nello stesso senso di altre parti del mondo celtico, non possiamo stabilirlo) risulta pari al (72±8)%. La barra d'errore è stata calcolata numericamente, variando $P(pw|ms)$.

“Druidesse” in Gallia Cisalpina? Parte II

Più significativo del calcolo effettuato nella sezione precedente, in quanto fornisce una “scala di verità” basata su studi psicometrici (Good 1979), è il calcolo del fattore di Bayes (Kass e Raftery 1995) per la presenza di “druidesse” e “druidi” in Gallia Cisalpina.

Il fattore di Bayes per le “druidesse” risulta:

$$K_w = \frac{P(pw|wd)}{P(pw|md)} = \frac{1}{\epsilon} \geq \sim 10 \quad (16)$$

mentre quello per i “druidi” risulta:

$$K_m = \frac{P(pm|wd)}{P(pm|md)} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2} \quad (17)$$

Il significato delle quantità introdotte con le Eq. (16) e (17) è che, data l'ipotesi per cui la struttura sia stata tracciata da una “druidessa” (rispettivamente da un “druido”), si confronta la capacità esplicativa dei modelli interpretativi “druidi e druidesse in Gallia Cisalpina” e “solo druidi in Gallia Cisalpina”.

A partire dalle tali equazioni si definisce un ulteriore fattore di Bayes, secondo la seguente relazione:

$$K = P(pw|ms) K_w + (1 - P(pw|ms)) K_m \quad (18)$$

La precedente espressione si ottiene considerando che il fatto che la struttura sia stata tracciata da una “druidessa” o da un “druido” ci porta a privilegiare l'ipotesi che in Gallia Cisalpina vi siano stati “druidi” di entrambe i generi per un fattore pari rispettivamente a K_w o K_m ; volendo determinare per quale fattore tale ipotesi sia globalmente favorita, dovremo calcolare una media pesata dei due fattori di Bayes, con i pesi rispettivamente dati da $P(pw|ms)$ e $P(pm|ms)=1-P(pw|ms)$. Si ottiene allora:

$$K = \frac{P(pw|ms)}{\epsilon} + \frac{(1 - P(pw|ms))}{\mu} \quad (19)$$

ovvero:

$$K \geq \sim \left(10 P(pw|ms) + \frac{(1 - P(pw|ms))}{2} \right) \quad (20)$$

che è l'espressione che impiegheremo per le considerazioni che seguono.

Sostituendo nell'Eq. (20) i dovuti valori, risulta un fattore di Bayes maggiore di $\sim(5.7\pm 0.8)$.

D'altra parte, secondo la scala di Kass e Raftery (Kass e Raftery 1995), si hanno le seguenti interpretazioni per il fattore di Bayes:

- Per $0 < K < 1$ si ha evidenza contraria.
- Per $1 < K < \sqrt{10}$ si ha evidenza marginale.
- Per $\sqrt{10} < K < 10$ si ha evidenza sostanziale.
- Per $10 < K < 100$ si ha forte evidenza.
- Per $K > 100$ si ha evidenza decisiva.

Tenuto conto del valore di K che abbiamo calcolato e del fatto che $\varepsilon=10$ è una stima prudenziale per il valore del parametro, possiamo affermare che le misure del sito, opportunamente interpretate, portano a un'evidenza “più che sostanziale” per l'ipotesi che in Gallia Cisalpina siano stati presenti tanto “druidi” che “druidesse”. La ragione per cui abbiamo posto tali termini tra virgolette è che il metodo da noi proposto non può ovviamente indicarci se si sia trattato di “druidi” e “druidesse” nello stesso senso della Gallia Transalpina o Britannia.

Conclusioni

Per quanto il nostro metodo di datazione e la conseguente interpretazione del Barec quale santuario celtico d'altura siano stati presentati in altre sedi (Gaspani e Spagocci 2018, 2020, 2022), riteniamo opportuno riportare alcune considerazioni a suo supporto, in quanto l'aver ipotizzato la presenza di “druidesse” e “druidi” è legato a tale interpretazione.

Nella stessa valle lombarda (Val Brembana) del Barec, un possibile santuario celtico di alta montagna è stato riconosciuto da (Casini et al. 2010) e datato al VI sec. a.C. Nella stessa area sono state rinvenute incisioni rupestri, tra cui molte iscrizioni (Casini e Fossati 2013, Motta 2016). Nelle iscrizioni protostoriche sono impiegate la lingua lepontica e quella camuna, il che sembra indicare che nell'area convergessero Celti e Reti. Questo fatto, a nostro avviso, rafforza l'interpretazione del recinto come santuario d'altura dell'età del Ferro.

Vogliamo poi affrontare il problema della deviazione dalla forma ellittica di una parte del recinto (Fig.1). A questo proposito suggeriamo che in epoca medievale la struttura, caduta in rovina, sia stata reimpiegata quale recinto per il bestiame; infatti, uno degli autori (Gaspani 2001) riporta che negli statuti trecenteschi della Comunità di Averara, a cui il Barec apparteneva, è menzionato l'uso agricolo dei recinti della zona. Essendosi perso il senso della sacralità del luogo, la parte caduta in rovina potrebbe essere stata ricostruita senza rispettare la forma ellittica. L'esame visivo ha infatti dimostrato che le pietre del settore non ellittico hanno un aspetto diverso rispetto alla parte ellittica.

Al di là di quello che crediamo essere l'interesse dei risultati da noi ottenuti in questo studio, risultati che ci sembrano rilevanti non solo per l'archeoastronomia ma anche per la storia del celtismo cisalpino, riteniamo di aver dimostrato come lo studio archeoastronomico di un sito, se condotto con mezzi non solo materiali ma soprattutto concettuali adeguati, possa rivelare importanti dettagli sulla storia e struttura del sito stesso.

Ringraziamenti

Desideriamo ringraziare il *team* di astrofili che, insieme a noi, ha eseguito le misurazioni sul campo relative al Barec dei piani di monte Avaro.

Bibliografia

- Casini, Stefania e Angelo Fossati. "Incisioni Rupestri e Iscrizioni Preromane a Carona (Bergamo)", *Bullétin d'Etudes Préhistoriques et Archéologiques Alpines* 24, (2013): 377-392.
- Casini, Stefania et al. "Un Santuario Celtico a Carona (Bergamo)?", *Notizie Archeologiche Bergomensi* 18, (2010): 133-154.
- Cernuti, Silvia e Adriano Gaspani. *Introduzione all'Archeoastronomia*, Firenze: Tassinari, 2006.
- Gaspani, Adriano. "I Barec del Monte Avaro: Semplici Recinti di Pastori?", *Terra Insubre* 18, (2001): 14-17.
- Gaspani, Adriano e Stefano Spagocci. "Il Barec dei Piani di Monte Avaro", *Terra Insubre* 85, (2018): 36-43.
- Gaspani, Adriano e Stefano Spagocci. "Archaeoastronomical Stratigraphy: Investigations on a Cisalpine Celtic Enclosure", *SEAC Publications* 1, (2020): 126-134.
- Gaspani, Adriano e Stefano Spagocci. "A Method for Dating Archaeological Structures Based on Astronomical Alignments", *Archaeoastronomy and Ancient Technologies* 10(1), (2022): 79-90.
- Good, Irving. "Studies in the History of Probability and Statistics. XXXVII A.M. Turing's Statistical Work in World War II", *Biometrika* 66 (2), (1979): 393–396.
- Kass, Robert e Raftery, Adrian. "Bayes Factors", *Journal of the American Statistical Association*, 90 (430): 773-795.
- Koepke, Nikola e Joerg Baten. "The Biological Standard of Living in Europe During the Last Two Millennia", *European Review of Economic History* 9, (2005): 61-95.
- Maddalena, Enrico. *Orienteering*. Milano: Hoepli, 2010.
- Motta, Filippo. "Sulle Ultime Campagne di Studio delle Epigrafi Preromane di Carona", in: Giancarlo Minella, Maurizio Pasquero et al., *Gli Orobì*. Varese: Terra Insubre, 2016.
- Stone, James. *Bayes' Rule*, Sheffield: Sebtel Press, 2013.



Fig.1. Una veduta del Bared di Monte Avaro
(da *Google Earth*, immagine © 2020 Maxar Technologies)

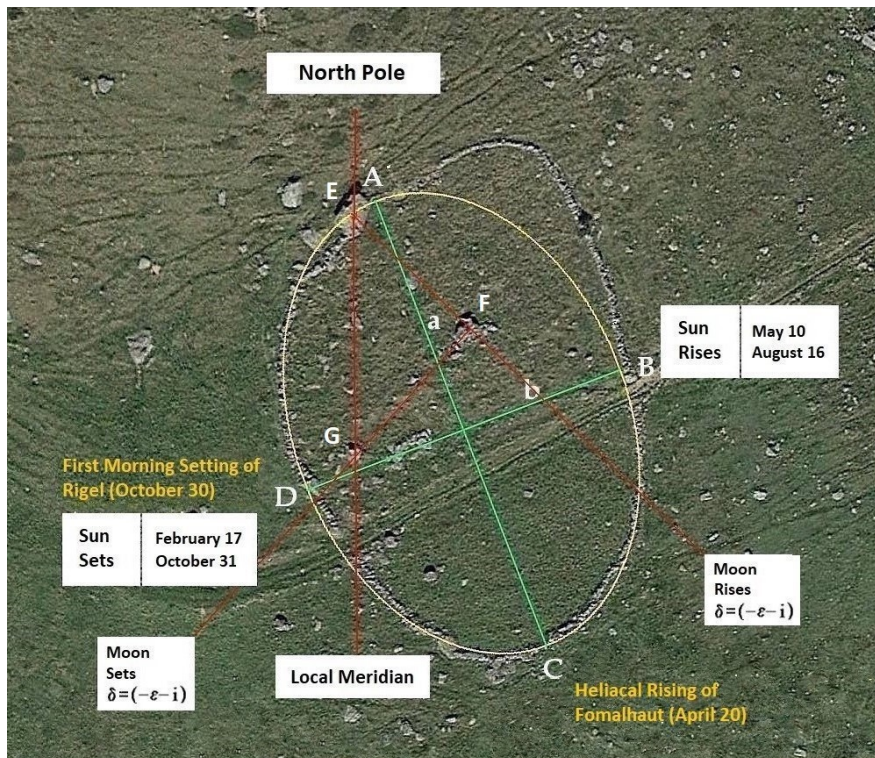


Fig.2. Allineamenti delle strutture del Bared di Monte Avaro
(adattato da *Google Earth*, immagine © 2020 Maxar Technologies)

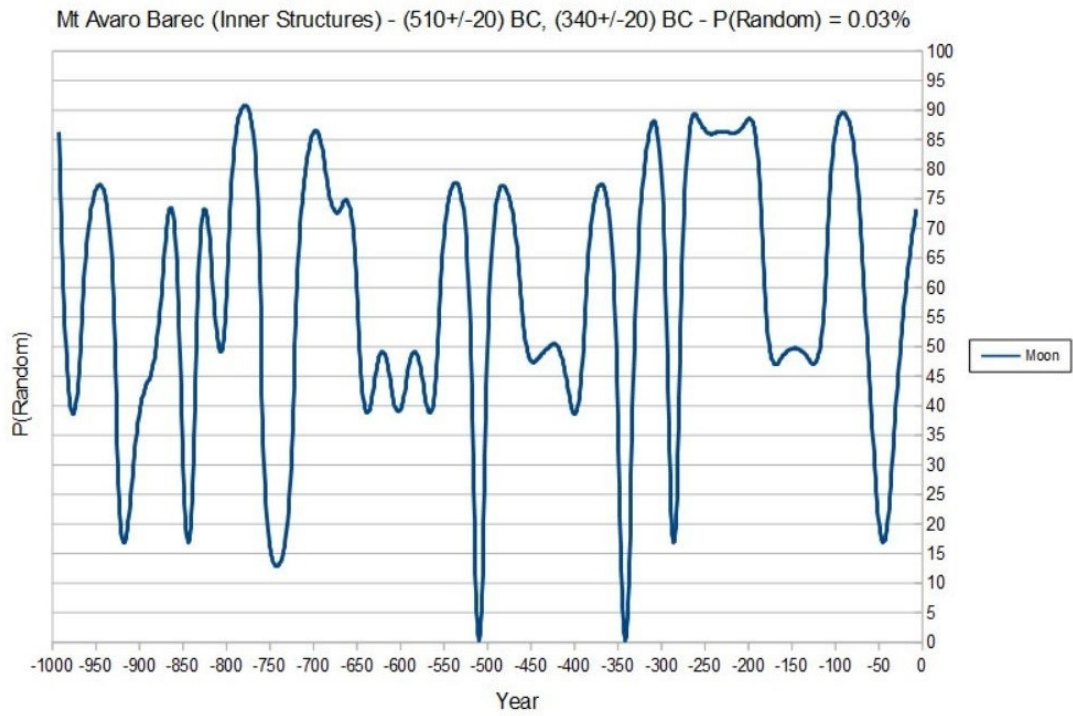


Fig.3. Curva di datazione, basata sulla probabilità di casualità, per le strutture interne del Barec e allineamenti lunari

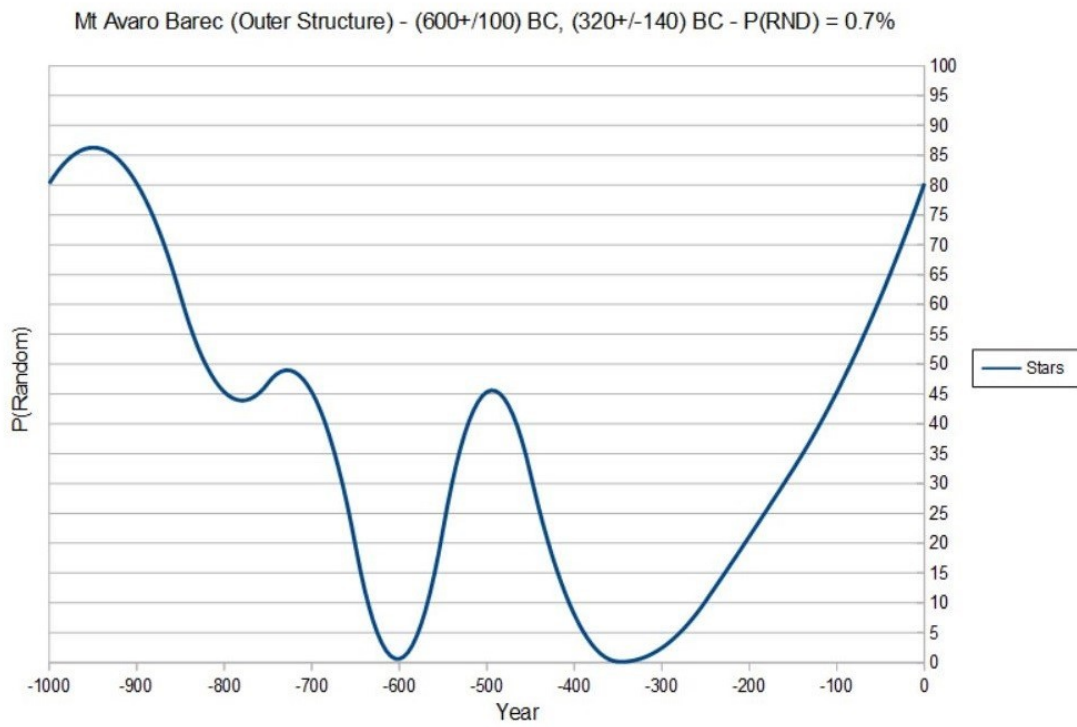


Fig.4. Curva di datazione, basata sulla probabilità di casualità, per le strutture esterne del Barec e allineamenti stellari