SOCIETÀ ITALIANA DI ARCHEOASTRONOMIA

V Congresso di Archeoastronomia, Astronomia antica e culturale e Astronomia storica

INAF-Osservatorio Astronomico di Brera
23 - 24 settembre 2005

A cura di
Elio Antonello

INDICE

MAUPERTUIS ED IL PRINCIPIO DELLA MINIMA AZIONE

MARINA MORICI
Università del Molise
morici@unimol.it

Sunto

In questo lavoro si espone il Principio di Minima Azione, privilegiandone lo sviluppo storico, e si illustra la figura del matematico francese che per primo lo introdusse: Pierre Luis Moreau de Maupertuis.

Abstract

In this paper we expose the principle of least action by favouring the historical development. Moreover we speak about the father of this principle: Pierre Luis Moreau de Maupertuis.

1. Introduzione

L'introduzione della legge di gravitazione universale -dovuta ad Isaac Newton- fece sorgere l'illusione che nel sistema del mondo ci fossero leggi semplici ed universali, dei veri principi che regolavano la filosofia naturale. A conforto di quanto detto possiamo citare il caso della legge di Titius-Bode sulle distanze planetarie, legge che nelle aspirazioni degli scopritori poteva affiancarsi alla gravitazione. Alla stessa maniera nella prima metà del XVIII secolo il matematico francese Pierre Luis Moreau de Maupertuis introdusse un nuovo principio, che egli chiamò Principio della Minima Azione con l'idea, ma che poi sarebbe divenuta un'illusione, di aver trovato un nuovo fondamento della dinamica.

Questa legge, che poi gli studiosi di meccanica avrebbero denominato come Principio dell'azione stazionaria, non aveva il significato che Maupertuis gli aveva attribuito in quanto vedremo che la proprietà che la caratterizzava era di rendere stazionario e non minimo il moto di un corpo.

Il risultato di Maupertuis era incompleto ed in questo senso abbiamo esaminato l'intero argomento, ma privilegiando soprattutto gli aspetti storici, aspetti che forse sono prevalenti sui risultati scientifici. E' bene ricordare, tuttavia, che sulle proprietà di minimo esisteva già qualche risultato quale il Principio di Fermat secondo il quale la luce si propagava lungo il cammino di minima durata.

2. Il Principio della Minima Azione

Al fine di dare un'enunciato del Principio della Minima Azione, che ripetiamo è preferibile chiamare Principio dell'azione stazionaria, seguendo il Levi Civita Amaldi, consideriamo un moto M ed un altro moto fittizio M_S che diremo, usando la terminologia del Maggi, sincrono nel senso che per ogni istante alle posizioni di un punto materiale P_i di M corrisponde il punto $P_i + \delta P_i$ di M_S dove δP_i denota uno qualsiasi degli spostamenti

virtuali relativi all'istante considerato. In altri termini P_i e $P_i + \delta P_i$ sono posizioni assunte nello stesso istante t_i.
Tanto premesso dall'equazione simbolica della dinamica

2.1 $$\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i\right) \times \delta P_i = 0$$

segue che

2.2 $$L' - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \times \delta P_i = 0 \qquad (L' = \sum \vec{F}_i \times \delta P_i).$$

Integrando tra due istanti t_0 e t_1 la (2.2) si ha che

2.3 $$\int_{t_0}^{t_1} L' dt - \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}_i \times \delta P_i dt = 0$$

da cui, per un'integrazione per parti, si ottiene

2.4 $$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + L') dt = 0$$

dove $\delta T = \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}_i \times \delta \vec{v}_i dt$.

La formula variazionale (2.4) corrisponde al Principio dall'Hamilton, asserzione che questo grande matematico pubblicò[1] nel 1834.
Nel caso particolarmente significativo di una sollecitazione conservativa risulta $L' = \delta U$ dove U è il potenziale e quindi consegue che il Principio di Hamilton assume la forma

2.5 $$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\, dt$$

dove $\mathcal{L}$ è la funzione lagrangiana della dinamica.
In definitiva il Principio di Hamilton si può enunciare alla seguente maniera: " Per un sistema materiale a vincoli bilaterali e privi di attrito, sottoposto ad una sollecitazione conservativa, il moto naturale è caratterizzato come quello che rende stazionario l'integrale (2.5) rispetto a tutti i moti variati sincroni fra le stesse configurazioni estreme".
A questo punto consideriamo i moti variati asincroni cioè quei moti in cui al punto P_i del moto M corrisponde il punto $P_i + \delta P_i$ del moto M_S convenendo, però, che le due posizioni

non avvengano più allo stesso istante, ma agli istanti t e $t+\delta t$. Allora l'incremento della forza viva sarà

2.6 $$\delta^* T = \delta T - 2T \frac{d}{dt}\delta t$$

dove δ^* indica la variazione asincrona diversa quindi dal δ che indica la variazione sincrona.
Segue quindi che il Principio di Hamilton si può scrivere come

2.7 $$\int_{t_0}^{t_1} (\delta^* T + 2T \frac{d}{dt}\delta t + L')\, dt = 0$$

ma questa formulazione può essere notevolmente semplificata, considerando i moti isoenergetici per i quali è verificata la condizione

2.8 $$\delta^* T = L'$$

ovvero nel caso conservativo
2.9 $$\delta^* (T - U) = 0$$

per cui il Principio di Hamilton diventa

2.10 $$\delta^* 2\int_{t_0}^{t_1} T\, dt = 0$$

ponendo $A = 2\int_{t_0}^{t_1} T\, dt$ e chiamando *Azione* la grandezza A, si ha che il Principio (della Minima Azione) si può esprimere alla seguente maniera: "Nel generico moto naturale l'azione ha carattere stazionario rispetto a tutti i moti variati asincroni isoenergetici".
Si noti che la condizione

2.11 $$\delta^* A = 0$$

è tipica del calcolo delle variazioni ed equivale alla sola stazionarietà. Ciò significa, in altri termini, che la condizione (2.11) è solo necessaria per la condizione dell'estremo, ma che la natura dell'estremo deve essere verificata ricorrendo ad altri metodi come ad esempio la condizione di Weierstrass per un estremo forte o la variazione seconda per un estremo debole.
Pertanto l'errore di Maupertuis fu di ritenere che la condizione (2.11) indicasse un minimo e non un caso di stazionarietà. Aggiungiamo ancora che la formulazione odierna è dovuta ad Hölder che la pubblicò nella memoria "Ueber die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis", Gött.Nachr, 1896 pag. 122.

Infine per avere un significato più elementare si trova[2]

2.12
$$A = \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}_i \times dP_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{t_0}^{t_1} \vec{v}_i dS_i$$

per cui, prendendo un solo punto P il Principio di Maupertuis si potrebbe ricondurre a rendere stazionario l'integrale $m\vec{v}s$ tra t_0 e t_1.

Va notato che Maupertuis fu il primo, riferendosi ad un solo punto di massa m, che introdusse l'azione relativa ad un generico arco di traiettoria s sotto la forma $m\vec{v}s$. Si deve ad Eulero l'aver sostituito ad una vaga idea di minimo l'integrale tra t_0 e t_1 e quindi a Lagrange l'aver esteso il Principio della Minima Azione ad un sistema di n punti materiali.

Come già detto la condizione (2.11) rende solo stazionario l'integrale, ma è stato dimostrato nel 1800 che per un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo l'azione corrispondente ad un qualsiasi moto naturale tra due configurazioni vicine non è solo stazionaria, ma anche minima rispetto a quella che si avrebbe per ogni moto variato asincrono ed isoenergetico.

3. Pierre Luis Moreau de Maupertuis

Questo grande matematico francese nacque a Saint Malo nel 1698, fu capitano dei Dragoni nell'esercito francese per poi dedicarsi alle matematiche.

Nel 1731 fu accolto nell'Accademia delle Scienze francesi e nel 1736 diresse la spedizione in Lapponia per la misura del grado del meridiano. In effetti Newton aveva previsto che la Terra dovesse essere schiacciata ai poli, mentre Gian Domenico Cassini aveva pensato il contrario. La disputa tra le due teorie fu abbastanza aspra per cui apparve chiaro che solo la misura del grado dell'arco del meridiano poteva far luce sulla questione.

Una prima spedizione fu inviata in Lapponia sotto la direzione di Maupertuis e durò dal 1736 al 1737, mentre una seconda si recò in Perù dal 1735 al 1749 e fu diretta da Godin, La Condamine e Bouguer.

Nel 1745 egli fu chiamato da Federico il Grande a presiedere la classe di fisica dell'Accademia di Berlino e durante questo periodo trovò quel risultato che abbiamo chiamato il Principio di Minima Azione, ma purtroppo questa scoperta trovò molte opposizioni come quella del matematico Samuel Koening e soprattutto l'astio con Voltaire. In effetti fra i due si scatenò una contesa violenta che forse risultò esiziale per Maupertuis tanto che nel 1753 dovette lasciare il suo incarico per poi trasferirsi a Basilea dove morì nel 1759.

Aggiungiamo che una sua allieva la Marchesa di Châtelet è da ricordare come una delle non molte donne studiose di matematica ed inoltre anche come una delle più importanti divulgatrici della filosofia di Newton in Francia.

Come si può leggere sullo Smith, un biografo di Voltaire definì Maupertuis come un matematico stizzoso e tronfio, ma non ci sentiamo di condividere questo giudizio primo perché nella polemica con Voltaire, Maupertuis ebbe la peggio e poi perché la fama di Voltaire è decisamente superiore a quella del nostro protagonista. In altri termini a quei tempi chi si metteva contro Voltaire si esponeva ad un pericolo non indifferente.

4. Storia del Principio della Minima Azione

Maupertuis pervenne al Principio della Minima Azione in alcuni articoli pubblicati tra il 1744 ed il 1747. In uno di questi è detto chiaramente che: "*...il principio generale è che la quantità d'azione necessaria a produrre qualche cambiamento in natura è la più piccola possibile...*" (si veda Dugas pag. 266). Come già detto questa affermazione è incompleta poiché la proprietà dell'azione, come già detto, riguardava solo la stazionarietà e non la proprietà di minimo, proprietà per la quale occorrevano altri e più complicati metodi. Questo aspetto ha carattere essenziale e bisogna pur aggiungere che lo stesso Maupertuis fece seguire delle considerazioni di carattere metafisico e teologico nel senso che il Creatore avesse creato ed organizzato il mondo secondo principi semplici ed ottimali. Queste affermazioni furono subito attaccate da D'Alembert il quale osservò che del Sommo Artefice si poteva osservare solo le volontà e non la natura, ma ben presto a questo scambio di opinioni si aggiunse la ben più violenta polemica con Koening e Voltaire.

In effetti Samuel Koening, che era professore di matematica in Olanda, negli Acta Eruditorum di Lipsia nel 1751 pubblicò un brano di una lettera del 1707, nel quale Leibnitz scriveva al matematico Hermann descrivendo qualcosa che poteva intendersi come un'anticipazione del Principio di Maupertuis.

Maupertuis rispose, visibilmente irritato, che tutta la questione nasceva da astio ed invidia verso la sua persona e che comunque non vi era nessuna prova che Leibnitz avesse scritto quello che Koening riportava; infatti di questa lettera non vi era nessuna traccia.

La polemica continuò fino a quando l'Accademia di Berlino non arrivò ad una conclusione: di fronte all'affermazione di Maupertuis: "la mia unica colpa è stata quella di aver scoperto un principio che ha generato un enorme interesse", l'Accademia di Berlino diede pienamente ragione a Maupertuis anche perché Eulero aveva preso decisamente posizione per questi.

Dobbiamo però aggiungere che, come già detto, nel 1753 Maupertuis cadde in disgrazia e fu costretto a lasciare Berlino.

La malafede di Koening appare come molto probabile e stimiamo di poter comprendere l'amarezza ed il risentimento di Maupertuis pur con tutti gli errori connessi al suo enunciato e duole dover notare che questa questione fu liquidata dai capricci di un re.

D'altra parte non si può negare che Voltaire ebbe un peso non trascurabile in questa vicenda e la sua polemica con Maupertuis ebbe un notevole influsso sulle sorti di quest'ultimo, specialmente per quella satira che il grande illuminista tracciò nella sua opera "La Diatribe du docteur Akakia médicin du pape".

In definitiva possiamo concludere che mettersi contro Voltaire significava andare incontro a rovina quasi certa, ma proprio questo giudizio dovrebbe indurre a valutare Maupertuis in un'ottica molto più favorevole, fermo però rimanendo l'incompletezza matematica della sua legge.

5. Conclusioni

Da quanto detto emerge chiaramente che la storia di un argomento scientifico costituisce aspetto insopprimibile di esso. In particolare nel Principio di Minima Azione verrebbe

spontaneo dire che l'interesse storico supera quello scientifico, anche se ci pare doveroso ricordare che molte dottrine sono nate in maniera incompleta per poi ricevere una sistemazione definitiva, sempre che poi l'avanzamento della scienza non faccia apparire come provvisoria una dottrina che pareva al di sopra di ogni dubbio.
Tuttavia le vicende relative al Principio della Minima Azione presentano delle strane intersezioni fra morale, metafisica, debolezze umane e capricci di potenti, per cui stimiamo che questo evento rappresenti un caso al quanto singolare nella storia della scienza.

6. Bibliografia

Badolati E.	*La legge di Titius-Bode,* Giorn. Di Astr. (6), 1980;
Beeson D.	*Maupertuis : an intellectual biography*, Oxford, 1992;
Brunet P.	*Maupertuis. Etude Biographique*, Paris, 1929;
Dugas R.	*Histoire de la mécanique,* Griffon, Neuchâtel, 1955;
Fee J.	*Maupertuis and the principle of least action*, Scientific monthly, 52 , 1941;
Kline M.	*Storia del pensiero matematico,*Einaudi Torino, 1972;
Le Sueur A.	*Maupertuis et ses correspondants*, Paris, 1897;
Levi Civita-Amaldi	*Lezioni di meccanica razionale,* Zanichelli Bologna vol.2,;
Maggi G.A.	*Dinamica dei sistemi,* Spoerri Pisa, 1917;
Smith D.E.	*History of Mathematics*, Dover New York, 1958;
Terral M.	*The man who flattened the earth: Maupertuis and the sciences in the enlightenment,* Chicago Press, 2003.

[1] Philosophical Transactions, 2, pag.47, sotto il titolo di "First essay on a general method in dinamics".
[2] È chiara la natura vettoriale della quantità dP_i .