SOCIETÀ ITALIANA DI ARCHEOASTRONOMIA

V Congresso di Archeoastronomia, Astronomia antica e culturale e Astronomia storica

INAF-Osservatorio Astronomico di Brera
23 - 24 settembre 2005

A cura di
Elio Antonello

INDICE

SOPRA UN PROCEDIMENTO SVILUPPATO DA ANNIBALE DE GASPARIS PER MIGLIORARE UN RISULTATO ASTRONOMICO DI NICOLA FERGOLA

TERESA BOCCIA
Dottorato di ricerca in "Teoria e Metodi Quantitativi per l'Analisi dello Sviluppo"
Università degli Studi del Molise

Sunto: Vengono esaminate, nel loro sviluppo storico, le soluzioni sul problema di Keplero trovate da de Gasparis, Machin ed Hermann. Tali metodi hanno la particolarità di ricondurre il problema ad un'equazione algebrica e di essi viene fatto il raffronto, riferito ovviamente alle conoscenze matematiche di quel periodo.

Abstract: In this paper we examine some solutions of Kepler's problem found by de Gasparis, Machin and Hermann. These approximate metods reduce Kepler's equation in to an algebraic equation and, of corse, we compare the goodness of the approximation among the two metods.

1. INTRODUZIONE

L'equazione di Keplero è stata oggetto di studio da parte di matematici ed astronomi da quattro secoli, più precisamente dal 1609, anno in cui Keplero pubblicò a Praga la sua "*Astronomia Nova....*"[1]. In tale famoso trattato egli affrontò la questione del passaggio dall'anomalia media a quella eccentrica, scrivendo: "*At data anomalia media, nulla geometrica methodus est, perveniendi ad coaequatam, videlicet ad anomaliam eccentri. Nam anomalia media est composita ex duabus areae partibus, sectore et triangulo ...*"[2]. E, seguendo la consuetudine del tempo, enunciò il problema in termini geometrici con la seguente formulazione: "*Aream semicirculi ex quocunque puncto diametri in data ratione secare*", da cui risulta l'equazione

$$E - \varepsilon \sin E = M \qquad (0 \le \varepsilon < 1)$$

dove l'eccentricità ε dell'orbita e l'anomalia media M ($0 \le M \le 2\pi$) sono note mentre è incognita l'anomalia eccentrica E.
Essendo tale equazione trascendente, il suo studio, non puramente numerico, risulta complesso. Keplero stesso comprese subito tale difficoltà che espresse con le parole seguenti: "*Mihi sufficit credere, solvi a priori non posse, propter arcus et sinus ἑτερογενειαν. Erranti mihi quicunque viam monstraverit, is erit mihi magnus Apollonius*".
Il grande matematico cercò di risolvere il problema applicando la regola di falsa posizione[3] che costituiva l'unico metodo numerico noto a quel tempo. Successivamente diversi sono stati i procedimenti risolutivi dell'equazione di Keplero, che naturalmente rappresentano una tipica espressione del loro tempo – segnando il più generale sviluppo storico della matematica – e che molto spesso hanno aperto la strada ad altre ricerche.

L'intento di questo lavoro è presentare una particolare soluzione dell'equazione di Keplero data da Annibale de Gasparis, il quale riconduce il problema – nell'ambito di un'approssimazione – alla risoluzione di un'equazione algebrica. Tale caratteristica risulta comune ad una precedente soluzione, quella determinata da Machin, per cui sarà opportuno confrontare i due metodi analizzando la precisione e la facilità d'uso.
Tra le formule che approssimano la soluzione dell'equazione di Keplero vanno ricordate quelle di Trembley (1782), Pacassi (1794) e Fergola, che, sostanzialmente, si ottengono considerando il seno o il coseno di entrambi i membri dell'equazione di Keplero per poi passare allo sviluppo in serie e quindi approssimare[4].
Non è facile assegnare una data al risultato di Fergola, risultato che era contenuto in un manoscritto[5] pubblicato solo nel 1857 nelle *Memorie dell'Accademia delle Scienze di Napoli* dal Flaùti. Lo stesso Flaùti riteneva che lo scritto del suo maestro potesse trovare collocazione temporale attorno agli inizi dell'800 e questa probabilmente è la tesi più accettabile. Dobbiamo aggiungere che quando nel 1857, sempre ad opera del Flaùti, vennero riesumati i manoscritti di Fergola e del suo allievo Giuseppe Scorza, venne dato incarico ad Annibale de Gasparis[6], a quei tempi maggiore esperto di meccanica celeste nel regno di Napoli, di analizzare le due soluzioni del Fergola relative al problema di Keplero e questi ne diede un giudizio pienamente positivo. Ma allo stesso tempo, dallo studio del procedimento analitico tenuto dal Fergola, il de Gasparis derivò un risultato più generale (1857), attraverso una migliore approssimazione, ottenendo un'equazione algebrica di 4° grado.

2. La formula del Fergola

Richiamiamo i fondamenti della soluzione data dal Fergola: dall'equazione di Keplero

$$E - \varepsilon \sin E = M$$

considerando il coseno di entrambi i membri

$$\cos\left(E - \varepsilon \sin E\right) = \cos M$$

ovvero

$$\cos E \cos\left(\varepsilon \sin E\right) + \sin E \sin\left(\varepsilon \sin E\right) = \cos M \quad ,$$

il Fergola sviluppa in serie le funzioni di argomento ε sinE, trascurando le potenze di ε superiori alla seconda in modo da ottenere

$$\cos E \cos\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2 E\right) + \varepsilon \sin^2 E = \cos M$$

da cui

$$1 - \sin^2 E = \frac{\cos M - \varepsilon \sin^2 E}{1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2 E} \; .$$

In definitiva, sempre arrestandosi ai termini in ε^2 e con qualche attenzione ai segni, si perviene all'interessante risultato:

$$\sin E = \frac{\sin M}{\sqrt{1+\varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos M}} \tag{2.1}$$

dove il radicando è sempre positivo[7] e quindi la soluzione è reale.
In Fergola manca un'analisi dell'errore relativo alla (2.1), che risulta però essere dell'ordine di ε^3. Infatti, seguendo Badolati[8], per una nota formula relativa ai polinomi di Legendre[9], si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos M}} = 1 + \varepsilon\cos M + \frac{1}{4}\varepsilon^2\left(1 + 3\cos 2M\right) + \ldots$$

e quindi la (2.1) diventa

$$\sin E = \sin M + \varepsilon \sin M \cos M + \frac{1}{4}\varepsilon^2 \sin M\left(1 + 3\cos 2M\right) + \ldots$$

che, per i primi tre termini, coincide con lo sviluppo in serie di Lagrange della funzione sin E

$$\sin E = \sin M + \varepsilon \sin M \cos M + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d}{dM}\cos M \sin^2 M + \ldots$$

3. Il contributo che de Gasparis diede al problema di Keplero

Nella "*Nota alla soluzione del problema di Keplero data dal ch. Prof. Nicola Fergola*"[10] il de Gasparis, sviluppando come il Fergola in serie le funzioni di argomento $\varepsilon \sin E$, non si arrestava però ai termini in ε^2, ma proseguiva fino a quelli in ε^4,

$$\cos\left(\varepsilon \sin E\right) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2 E + \frac{\varepsilon^4}{24}\sin^4 E$$

$$\sin^4 E \,\sin\left(\varepsilon \sin E\right) = \varepsilon \sin E - \frac{\varepsilon^2}{6}\sin^3 E$$

così da ottenere:

$$\sin^4 E + 3\,\frac{1+\varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos M}{\varepsilon^3\cos M - \varepsilon^4}\sin^2 E = 3\,\frac{\sin^2 M}{C\cos M - \varepsilon^4} \quad .$$

In sostanza, ponendo $y = \sin E$, egli giungeva ad un'equazione del tipo:

$$y^4 + 3B\bar{\varepsilon}\, y^2 - 3B\sin^2 M = 0 \tag{3.1}$$

dove

$$B = \frac{1}{\varepsilon^3 \cos M - \varepsilon^4} \qquad \bar{\varepsilon} = 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\cos M \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

ed in definitiva, con l'ulteriore posizione $x = y^2$, si trovava l'equazione risolvente di 2° grado

$$x^2 + 3B\bar{\varepsilon}\, x - 3B\sin^2 M = 0 \quad .$$

Per risolvere la (3.1), il de Gasparis utilizza il metodo trigonometrico che, nel passato, veniva usato comunemente per risolvere le equazioni di 3° grado, ma talvolta anche quelle di 2° grado. Tale metodo consisteva nel ricorrere alle formule di duplicazione o triplicazione della tangente per poi ottenere l'incognita attraverso le tavole trigonometriche.
Per dare un esempio di tale procedura, consideriamo l'equazione

$$x^2 + ax - b = 0 \qquad (b > 0)$$

e paragoniamola con la formula di duplicazione della tangente

$$tg^2\,\phi + \frac{2}{tg\, 2\phi}\, tg\,\phi - 1 = 0 \quad .$$

Ponendo $x = r\, tg\,\varphi$, si trova

$$a = \frac{2r}{tg\, 2\phi} \qquad b = r^2$$

da cui

$$x = \sqrt{b}\; tg\,\phi\,, \quad x = -\sqrt{b}\;\cot g\,\phi \quad .$$

L'autore concludeva la sua interessante nota aggiungendo che, spingendo l'approssimazione fino ai termini in ε^6, si sarebbe ottenuta un'equazione trinomia di 6° grado

$$y^6 + C(\cos M - \varepsilon)y^4 + \frac{30}{\varepsilon^3}\, C\bar{\varepsilon}\, y^2 - \frac{30}{\varepsilon^3}\, C\sin^2 M = 0$$

con $y = \sin E$, $C = \dfrac{60}{\varepsilon^2 (8\varepsilon - 3\cos M)}$

e quindi un'equazione risolvente cubica:

$$x^3 + C(\cos M - \varepsilon)x^2 + \frac{30}{\varepsilon^3} C\bar{\varepsilon} x - \frac{30}{\varepsilon^3} C \sin^2 M = 0$$

L'analisi di de Gasparis, di indubbio valore scientifico, non risulta però completa perché manca la discussione sulle quattro radici della (3.1) che, in particolare, avrebbe dovuto evidenziare che una sola di esse è compresa tra 0 ed 1; d'altra parte non viene operato il confronto tra la soluzione della (3.1) e quella che si poteva ottenere applicando, alla formula del Fergola, la ben nota correzione data dalla relazione[11] che segue, ove E_0 è una prima approssimazione di E,

(3.2) $$\Delta E \cong \frac{M - E_0 + \varepsilon \sin E_0}{1 - \cos E_0} \qquad (\Delta E = E - E_0)$$

confronto che naturalmente deve essere fatto tenendo presente i mezzi che usavano gli astronomi del tempo. E' invece innegabile il merito della (3.1) per quanto riguarda i valori elevati dell'eccentricità.
Viceversa, come già detto, l'inconveniente del procedimento di de Gasparis consiste nell'ottenere quattro radici, mentre la soluzione del Fergola è unica.
Effettueremo ora uno studio sintetico dell'equazione di de Gasparis, precisando che la certezza di avere una radice tra zero ed uno potrebbe raggiungersi esclusivamente col teorema di Sturm, che però è di natura complicata e quindi inadatto ad un lavoro di natura storica. Perciò procederemo con qualche semplice osservazione.
Essendo la discussione completa sul discriminante piuttosto onerosa, risulta più conveniente studiare il diagramma della funzione associata per poi completare l'analisi con talune regole relative alle equazioni algebriche.

4. Discussione dell'equazione di de Gasparis

Riprendendo l'equazione (3.1), si ottiene in maniera elementare l'equazione risolvente di 2° grado

(4.1) $$x^2 + 3B\bar{\varepsilon}x - 3B\sin^2 M = 0$$

che è del tipo

(4.2) $$x^2 + px - q = 0$$

con

$$x = y^2 = \sin E \,, \qquad B = \frac{1}{\varepsilon^3 (\cos M - \varepsilon)} \,, \qquad \bar{\varepsilon} = 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos M \qquad (0 < \varepsilon < 1) \quad .$$

Essendo, come già osservato $\bar{\varepsilon} > 0$, i segni di p e di q dipendono dal segno di B.
Nel caso $B > 0$, il che equivale a $\cos M > \varepsilon$, il termine noto risulterà minore di zero per cui il discriminante sarà certamente positivo e quindi si avranno due radici reali e distinte. Inoltre, applicando alla (4.2) la regola di Cartesio, si vede subito che una sola radice risulterà positiva.
Ora ponendo

$$f(x) = x^2 + 3B\bar{\varepsilon}\, x - 3B \sin^2 M$$

per $y = 1$, si ha

$$f(1) = 1 + 3B\bar{\varepsilon} - 3B \sin^2 M = 1 + 3B(\bar{\varepsilon} - \sin^2 M) = 1 + 3B(1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon \cos M - \sin^2 M) =$$

$$= 1 + 3B(\varepsilon^2 + \cos^2 M - 2\varepsilon \cos M) = 1 + 3B(\varepsilon - \cos M)^2 > 0$$

e quindi, poiché risulta f(0) = – q < 0, esisterà una sola radice tra zero ed uno.
Il caso $B = 0$, per i dati valori di ε, non può sussistere.
Infine se $B < 0$, cioè se $\cos M < \varepsilon$, il termine noto sarà positivo, cioè f(0) < 0, mentre il coefficiente del termine di 1° grado sarà negativo. La sequenza dei coefficienti presenterà dunque due variazioni e quindi le due radici, se reali, saranno entrambe positive.
Per $y = 1$ risulterà

$$f(1) = 1 + 3B(\varepsilon - \cos M)^2 = 1 + \frac{3}{(\varepsilon^3 \cos M - \varepsilon^4)(\varepsilon - \cos M)^2} =$$

$$= 1 + 3\,\frac{\cos M - \varepsilon}{\varepsilon^3} = 1 - 3\,\frac{\varepsilon - \cos M}{\varepsilon^3} \,.$$

Affinché si abbia una radice tra 0 ed 1, occorre imporre la condizione f(1) < 0, cioè

$$1 - 3\,\frac{\varepsilon - \cos M}{\varepsilon^3} < 0$$

da cui in definitiva

$$\cos M < \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3} \quad .$$

Dalla discussione dell'equazione di de Gasparis, consegue pertanto che esiste l'intervallo critico

$$\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3} < \cos M < \varepsilon \tag{4.3}$$

dove possono risultare valori maggiori di 1, ovvero soluzioni anomale perché una soluzione rappresenta sin E.

In realtà, se la soluzione è appena maggiore di 1, si potrà ritenere sin E = 1 e quindi E = $\pi/2$. Ma dobbiamo ricordare che quando cos M = ε, per valori piccoli di ε, tutte le formule approssimate alle quali abbiamo accennato nel nostro lavoro presentano difficoltà.
Infatti, ponendo $\cos M = \varepsilon$ nella formula di Fergola, si vede subito che risulta $\sin E = \sqrt{1-\cos^2 M}$ (per semplicità, ci limitiamo ad archi compresi nel primo quadrante) e quindi, in definitiva, $\sin E \cong 1$, il che significa che E è in prossimità di $\frac{\pi}{2}$. Per valori grandi di ε, è da tener presente che l'approssimazione del Fergola potrebbe diventare critica.
Naturalmente la stessa cosa vale per il procedimento di de Gasparis e pertanto, in tal caso, l'approssimazione presenta delle difficoltà.
E' bene aggiungere tuttavia che il caso precedente (vale a dire cos M = ε), in campo analitico, si può ricondurre ad una ben nota discussione relativa alle equazioni di 2° grado quando il coefficiente di x^2 (nel nostro caso $\frac{1}{B}$) tende a zero.
E' interessante presentare ora un esempio relativo all'intervallo critico $\cos M \in \left]\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3}, \varepsilon\right[$. Per $\varepsilon = 0.3$ risulta $\cos M \in \left]0.291, 0.3\right[$.
Fissato allora $\cos M = 0.293$, l'equazione (4.1) avrà una soluzione molto maggiore di 1 e l'altra uguale a 0.2499905; da quest'ultima risulta per sin E il valore 0.499 ed in definitiva $E \cong \frac{\pi}{6}$. Viceversa, per $\cos M = 0.296$, una soluzione sarà molto prossima ad 1 e l'altra molto maggiore di 1. Infine, per $\cos M = 0.299$, entrambe le soluzioni saranno molto maggiori di 1.

5. La soluzione di Machin

Il metodo di Machin[12] per la risoluzione del "problema delle anomalie" brilla per genialità: egli opera un cambiamento di variabile con l'introduzione di un parametro *a*, sviluppa poi in serie trascurando il termine di 7° grado e fissa infine il parametro in modo tale che la serie a termini dispari manchi del termine di 5° grado.
Da

$$M = E - \varepsilon \sin E \qquad (0 < \varepsilon < 1)$$

ponendo

$$E = a \arcsin s$$

risulta

$$M = a \arcsin s - \varepsilon \sin(a \arcsin s).$$

Considerando i seguenti sviluppi in serie[13]

$$\arcsin s = s + \frac{1}{3!} s^3 + \frac{9}{5!} s^5 + \frac{225}{7!} s^7 + \dots \tag{5.1}$$

(5.2)

$$\sin\left(a \arcsin s\right) = a\,s - \frac{a\left(a^2-1\right)}{3!}\,s^3 + \frac{a\left(a^2-1\right)\left(a^2-9\right)}{5!}\,s^5 - \frac{a\left(a^2-1\right)\left(a^2-9\right)\left(a^2-25\right)}{7!}\,s^7 + \dots$$

si avrà, fermandosi ai termini in s^5:

(5.3)
$$\frac{M}{a} = \left(1-\varepsilon\right)s + \frac{1+\varepsilon\left(a^2-1\right)}{3!}\,s^3 + \frac{9-\varepsilon\left(a^2-1\right)\left(a^2-9\right)}{5!}\,s^5$$

per cui, scegliendo il parametro *a* in modo tale che

(5.4)
$$9 = \varepsilon\left(a^2-1\right)\left(a^2-9\right) \quad ,$$

ed indicando con *n* la radice[14]

(5.5)
$$n = \sqrt{5 + \sqrt{16 + 9\,\varepsilon^{-1}}} \quad ,$$

segue che la soluzione numerica della (5.3) e quindi dell'equazione di Keplero può essere ricondotta – nell'ambito di un'approssimazione – alla risoluzione dell'equazione cubica:

$$\frac{1+\varepsilon\left(n^2-1\right)}{6}\,s^3 + \left(1-\varepsilon\right)s - \frac{M}{n} = 0\,, \qquad s^3 + \frac{1-\varepsilon}{c}\,s - 2\eta = 0\,,$$

dove

$$c = \frac{1+\varepsilon\left(n^2-1\right)}{6}\,, \qquad \eta = \frac{M}{2nc}\,.$$

Poiché il coefficiente del termine di 1° grado è positivo[15], l'equazione ha una soluzione reale che pertanto può essere calcolata con la formula di Tartaglia-Cardano

(5.6)
$$s = \sqrt[3]{\eta + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\eta - \sqrt{\Delta}} \qquad\qquad \Delta = \eta^2 + \frac{\left(1-\varepsilon\right)^3}{27\,c^3}$$

che, a parte qualche trasformazione algebrica, coincide con la formula di Machin.
Bisogna dire che la soluzione di Machin è molto geniale ma piuttosto elaborata. Essa non presenta problemi di studio delle radici, essendo una sola la radice reale, ma non va bene per valori piccoli di ε in quanto, nell'espressione di *n*, ε^{-1} diventa molto grande.
Esclusi i valori di ε prossimi allo zero, risulta sensibilmente $n \cong \sqrt{10} \cong 3.162$ (in quanto per $0.1 < \varepsilon < 1$ si ha $\sqrt{10} < n < 3.91$).

Ora il primo termine trascurato nella (5.3), con *a* = *n*, è $\frac{n^3}{560}s^7$ ed essendo

$s = \sin\frac{E}{n} \cong \sin\frac{M}{n}$, l'approssimazione si ottiene a meno di infinitesimi dell'ordine di

$$\left(\frac{n^3}{560}\sin\frac{M}{n}\right)^7 .$$

E' bene aggiungere che Machin propone di migliorare l'approssimazione ottenuta dalla (5.6) mediante la formula (3.2).

6. CONFRONTO

$M = 0.5$			
ε	De Gasparis	Machin	Soluzione esatta a 8 cifre decimali
0.1	0.55247998	0.55248012	0.55247999
0.2	0.61546806	0.61546860	0.61546822
0.3	0.69124990	0.69125154	0.69125029
0.4	0.78184059	0.78183584	0.78183235
0.5	0.88799391	0.88787168	0.88786227
0.6	1.00829637	1.00722936	1.00720528
0.7	1.14092227	1.13445009	1.13439507

$M = 1$			
ε	De Gasparis	Machin	Soluzione esatta a 8 cifre decimali
0.1	1.08859772	1.08861186	1.08859776
0.2	1.18532416	1.18536157	1.18532420
0.3	1.28811103	1.28817049	1.28809131
0.4	1.39406271	1.39389571	1.39374709
0.5	1.50267767	1.49895395	1.49870172
0.6	(*)	1.60014239	1.59974855
0.7	1.46868645	1.69520705	1.69463891

$M = 1.5$			
ε	De Gasparis	Machin	Soluzione esatta a 8 cifre decimali
0.1	1.59995692	1.60015023	1.59995750
0.2	1.69836541	1.69877794	1.69837459
0.3	1.79259109	1.79331008	1.79264754
0.4	1.88072065	1.88188357	1.88091852
0.5	1.96169056	1.96348623	1.96218935
0.6	2.03517203	2.03782988	2.03618813
0.7	2.10134898	2.10512238	2.10313552

$M = 2$			
ε	De Gasparis	Machin	Soluzione esatta a 8 cifre decimali
0.1	2.08697129	2.08811019	2.08697134
0.2	2.16564503	2.16760440	2.16564687
0.3	2.23602249	2.23871941	2.23603150
0.4	2.29861358	2.30198849	2.29864337
0.5	2.35417250	2.35817198	2.35424276
0.6	2.40352278	2.40809769	2.40365715
0.7	2.44745995	2.45256535	2.44768323

$M = 2.5$			
ε	De Gasparis	Machin	Soluzione esatta a 8 cifre decimali
0.1	2.55532553	2.55968795	2.55532554
0.2	2.60264627	2.60910120	2.60264639
0.3	2.64336111	2.65117767	2.64336180
0.4	2.67863585	2.68739623	2.67863808
0.5	2.70941774	2.71884433	2.70942161
0.6	2.73646872	2.74636454	2.73647573
0.7	2.76040064	2.77062097	2.76041179

$M = 3$			
ε	De Gasparis	Machin	Soluzione esatta a 8 cifre decimali
0.1	3.01283975	3.02590238	3.01283975
0.2	3.02355312	3.04090140	3.02355312
0.3	3.03262549	3.05183331	3.03262549
0.4	3.04040573	3.06037428	3.04040573
0.5	3.04715077	3.06730956	3.04715077
0.6	3.05305388	3.07308737	3.05305388
0.7	3.05826316	3.07799221	3.05826316

Viene ora presentata una tabella contenente le soluzioni approssimate dell'equazione di Keplero secondo de Gasparis e secondo Machin, riportando poi – per esigenza di confronto – la soluzione esatta ad otto cifre decimali.
Nel caso (*), le quattro radici dell'equazione di de Gasparis, nell'incognita sin E, risultano tutte in valore assoluto maggiori di 1, con due molto maggiori di 1 e due prossime ad 1. Pertanto è da intendere che l'approssimazione di de Gasparis porti al valore E = π/2. Si noti che tale caso rientra nella relazione (4.3).
In definitiva si vede che il metodo di de Gasparis e quello di Machin sono in sostanza equivalenti: le due formule hanno entrambe pregi e difetti, per cui non sussiste una prevalenza assoluta di una sull'altra.
E' opportuno sottolineare che la questione dell'affidabilità, vale a dire stima dell'errore e velocità di computazione, non venne affrontata né da Machin né dal de Gasparis.

7. La soluzione di Hermann

Tra gli studi precedenti al lavoro di Machin segnaliamo quello di Hermann, pubblicato nel 1726, in cui, oltre alla soluzione grafica basata sull'uso della sinusoide – prima nel suo genere – si trova una soluzione approssimata dell'equazione di Keplero attraverso la risoluzione di un'equazione algebrica[16]. In sostanza, l'Hermann, sviluppando in serie sin E nell'equazione di Keplero, otteneva

$$E-\varepsilon\, E+\frac{\varepsilon}{3!}E^3-\frac{\varepsilon}{5!}E^5+\frac{\varepsilon}{7!}E^7-\ldots=M$$

cioè

$$(1-\varepsilon)E+\frac{\varepsilon}{3!}E^3-\frac{\varepsilon}{5!}E^5+\ldots=M$$

da cui, arrestandosi al p-mo termine, discende l'equazione algebrica

$$(1-\varepsilon)E+\frac{\varepsilon}{3!}E^3-\frac{\varepsilon}{5!}E^5+\ldots-(-1)^p\frac{\varepsilon}{(2p+1)!}E^{2p+1}=M \tag{7.1}$$

E' chiaro tuttavia che un gran numero di termini nella (7.1) comporta una serie di problemi che, anziché semplificare la questione, la complicano e tra questi ricordiamo la presenza di più radici, le difficoltà di risoluzione approssimata ed infine la valutazione dell'errore. Inoltre occorre aggiungere che naturalmente il procedimento risulta valido per valori piccoli di ε.
Ad esempio, limitandoci al caso

$$(1-\varepsilon)E+\frac{\varepsilon}{6}E^3=M\ ,$$

per M = 1 ed ε = 0.1, si trova l'equazione

$$E^3+54\,E-60=0$$

che – avendo il discriminante positivo – ha una sola radice. Con la formula di Cardano-Tartaglia si trova per essa il valore 1.0873 che risulta essere una buona approssimazione del valore esatto 1.0885977… .
Invece, per M = 2 ed $\varepsilon = 0.1$, dall'equazione

$$E^3 + 54\,E - 120 = 0$$

sempre con la formula di Cardano-Tartaglia, risulta la soluzione 2.060272491 mentre il valore esatto è 2.0869713… .

8. CONCLUSIONE

L'analisi dell'approssimazione dell'equazione di Keplero con un'equazione algebrica, relativa al '700 e '800, ha un interesse puramente storico. In realtà i metodi esposti brillano per genialità, ma non sono particolarmente agevoli, oggi come ieri, per l'uso puramente numerico. Dando per scontato che oggi la soluzione per iterazione – dati i moderni mezzi di calcolo elettronico – è la preferibile, rimane da chiedersi quale poteva considerarsi come più idonea per gli astronomi del tempo. In questo senso, una tra le formule di Trembley, Pacassi o Fergola poteva ritenersi interessante perché, aggiungendo (anche più volte) la correzione (3.2), si perveniva speditamente alla precisione voluta. Tuttavia non bisogna dimenticare che una soluzione puramente numerica dell'equazione di Keplero andava bene per le necessità dell'astronomia pratica, ma si rivelava insufficiente per gli studi della meccanica celeste, ove solo la serie di Lagrange e le altre serie trigonometriche potevano dare risposta ai problemi relativi al moto dei pianeti.

BIBLIOGRAFIA

Badolati E., *Sintesi storica della risoluzione dell'equazione di Keplero per mezzo della serie di Lagrange*,
Rend. Acc. Sc. Napoli, XLIII,1976, pag. 28.

Badolati E., *Sintesi storica di talune soluzioni dell'equazione di Keplero*,
Atti Acc. Pontaniana, XXVI, 1977, pag. 225.

Badolati E., *L'equazione di Keplero e la Scuola matematica napoletana*,
Rend. Acc. Sc. Napoli, XLVI, 1979, pag. 1-21.

Badolati E., *On the history of Kepler's equation*,
Vistas in Astronomy, vol. 28, 1985, pag. 343-345.

Badolati E., *Storiografia matematica dell'Ottocento napoletano*,
Univ. del Molise, coll. Seges, 22, 1996.

Badolati E., *Sopra una formula di Machin*,
Mem. S. A. It., vol. 68, 1997.

Badolati E., *Sopra un risultato astronomico di Nicola Fergola*,
Atti IV Convegno S.I.A., Lerici, 2004 (in corso di stampa).

Brinkley J., *An examination of various solutions of Kepler's problem*, Trans. R. Irish Academy, IX, 1803.

Flaùti V., *Il problema di Keplero risoluto dal fu illustre N. Fergola …*, Mem. R. Acc. Sc. Napoli, 1857. (In questo lavoro le osservazioni di Annibale de Gasparis sono a pag. XVII ed a 173)

Hermann J., *Geminus modus directus dividendi semicirculum …(De problema Kepleriano)*, Comm. Ac. Sc. Petropolitanae, I, 1726.

Machin J., *The solution of Kepler's problem*, Phil Trans., XL, 1737-38.

Radau R., *Bibliographie du problème de Képler*, Bull. Astr., 1900.

NOTE

[1] Cap. LX, parte IV.

[2] La locuzione *anomalia coequata*, introdotta da Keplero, sta per anomalia vera.

[3] Si veda Keplero, *Op. Omnia*, vol. III (pag. 504), dove si legge: "*Data media … non habeo modem inveniendi eccentri anomaliam … quam per falsi*".

[4] In "*Sopra un risultato astronomico di Nicola Fergola*", Badolati ha dimostrato l'equivalenza di queste tre formule.

[5] In verità il manoscritto conteneva anche una seconda soluzione, che utilizzava la cicloide. Tale soluzione si riconnetteva ai precedenti risultati di Wren e di Riccati.

[6] Il de Gasparis si era già interessato in precedenza dell'equazione di Keplero ed al riguardo aveva presentato, nel 1856, all'Accademia delle Scienze di Napoli uno studio, di carattere numerico, valutato in maniera pienamente positiva dalla commissione costituita dai soci Capocci, Nobile, Bruno e Trudi.

[7] Il Fergola osserva che $1+\varepsilon^2 > 2\varepsilon \geq 2\varepsilon \cos M$.

[8] Cfr. Badolati, *Sopra un risultato astronomico di Nicola Fergola*.

[9] I polinomi e la formula risalgono al 1784. Cfr. Whittaker-Watson, Modern Analysis, Cambridge, Cambridge Univ. Press, IV ed., 1965, pag. 302-303.

[10] Mem. Acc. Sc. Napoli, 1857

[11] Cfr. de Gasparis, pag. 174. Tale formula è dovuta a Newton. Cfr. J. C. Adams, "On Newton's solution of Kepler's problem" (Mont. Not. R. Astr. Soc. – XLIII, 1882-83, pag. 43).

[12] Cfr. Machin, pag. 205.

[13] Machin non si preoccupò della convergenza delle due serie. Per la (5.2) cfr. E. W. Hobson, *A treatise on plane ad advanced trigonometry*, VII ed., Cambridge, 1928, pag. 272 e seg.

[14] La (5.5) è dovuta a Brinkley. Machin invece considera il valore:

$$n = \sqrt{5 + \sqrt{25 + 9\,p\,f^{-1}}} \qquad dove \quad p = 1-\varepsilon \qquad f = \varepsilon.$$

[15] Tale condizione è implicitamente ammessa da Machin.

[16] Cfr. il testo di Hermann citato in bibliografia (pag. 142).

L'A. ringrazia la dott.ssa Sandra Ciccone per il cortese aiuto nelle valutazioni numeriche della tabella.