Società Italiana di Archeoastronomia

Atti del VI Congresso di Archeoastronomia, Storia dell'Astronomia Antica, Astronomia culturale e Astronomia Storica

Università degli Studi del Molise
Dipartimento di Scienze Economiche, Gestionali e Sociali
Campobasso, 22 - 23 settembre 2006

A cura di
Elio Antonello

INDICE

SULL'INSIEME DI CONVERGENZA DELLA SERIE DI LAGRANGE NELLA MECCANICA CELESTE

PASQUALE LAVORGNA
Ph. D. in *"Teoria e Metodi Quantitativi per l'Analisi dello Sviluppo"*
Università del Molise
lavorgna@unimol.it

Riassunto

Si esamina, al variare dell'eccentricità ε l'insieme di convergenza della serie di Lagrange che risolve il problema di Keplero.

Quadro storico

Nel 1770 Lagrange presentò, all'Accademia di Berlino, una pubblicazione[1] suddivisa in quattro parti in cui:

- esprimeva le radici di un'equazione algebrica come somme delle potenze di grado qualunque
- esponeva lo sviluppo in serie
- spiegava come distinguere le radici di un'equazione e come rappresentarle per serie
- studiava la convergenza delle serie medesime.

Applicando i risultati conseguiti, lo stesso studioso, nel 1771, pubblicò un nuovo lavoro[2] in cui ottenne gli sviluppi in serie di numerose funzioni relative alla meccanica celeste. In particolare dall'equazione di Keplero $M = E - \varepsilon \sin E$, Lagrange ricavò lo sviluppo in serie $E = M + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{d\,M^{k-1}} \sin^k M$ parlando di mera convergenza generica per valori molto piccoli dell'eccentricità ε. Successivamente, Laplace[3], nei suoi studi riuscì a stabilire un confine superiore per l'eccentricità che garantisse la convergenza della serie di Lagrange. Un'indagine più approfondita sulla convergenza di una qualsiasi serie di Lagrange fu condotta da Cauchy come testimoniano le considerazioni pubblicate in uno dei suoi lavori[4]. In particolare, Cauchy giunse al seguente risultato $\begin{cases} M = E - \varepsilon \sin E \\ 1 = \varepsilon \cos E \end{cases}$, ossia ε era la soluzione comune del riportato sistema. Ma la pubblicazione più importante sull'argomento è senz'altro quella[5] di Rouchè in cui vengono proposte:

- le condizioni di validità di uno sviluppo in serie di Lagrange

---

[1] Lagrange J.L. "Nouvelle méthode pour resoudre les équations litterales par la moyen des séries", 1770.
[2] Lagrange J.L. "Sur le problème de Kepler", 1771.
[3] Laplace P.S. "Sur le développement de l'anomalie vraie et du rayon vecteur elliptique …", 1823.
[4] Cauchy A.L. "Sur divers points d'analyse", 1829.
[5] Rouché E. "Sur la série de Lagrange", 1862.

- svariate applicazioni fra cui quella relativa all'equazione di Keplero
- una stima dell'errore che si commette troncando una serie di Lagrange al termine $n-mo$.

Interessante è la condizione di Rouché relativa alla convergenza della serie di Lagrange: "*se esiste (nel piano complesso della variabile E) un contorno S sul quale si abbia* $\varepsilon\left|\frac{\sin E}{E-M}\right|<1$ *allora l'equazione di Keplero ammette all'interno di S una sola radice (quella cioè che per* $\varepsilon \to 0$ *ha per limite* M *) e lo sviluppo in serie converge ad essa*".

Introduzione

Fra gli studi compiuti da Keplero[6] famose, certamente, sono le sue tre leggi; meno nota, ma per questo non meno interessante risulta essere *l'equazione di Keplero*

1. $M = E - \varepsilon \sin E$, $0 \le M \le 2\pi$ ed $0 < \varepsilon < 1$

dove:

- M l'anomalia media, ossia la misura dell'angolo descritto nell'intervallo di tempo $t - t_0$ da un vettore ruotante intorno ad O (centro dell'ellisse), nel senso del pianeta, con velocità angolare n.
- E l'anomalia eccentrica, ossia la misura (in radianti) dell'angolo BOQ, $0 \le E \le 2\pi$
- $\varepsilon = \frac{d}{a}$ l'eccentricità, $0 \le \varepsilon < 1$ essendo $\overline{OS} = d$ e $\overline{OB} = a$.

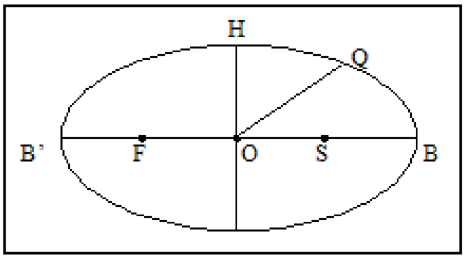

Figura 1. La traiettoria dei pianeti.

L'equazione di Keplero, che è un'equazione trascendente, nonostante appaia semplice, rappresenta un problema assai complesso per uno studio non numerico. In tal senso presenteremo alcune valutazioni numeriche[7], in cui assegnato M ed ε determineremo E.

Talune valutazioni numeriche

Dalla 1, facendo variare i valori assegnati ad M ed ε otteniamo, mediante il metodo iterativo, le soluzioni della E:

[6] Keplero Giovanni (Weil 1571-Ratisbona 1630).
[7] Le nostre indagini sono state condotte con l'ausilio del software package Mathematica 4.2.

M=[1]		M=[1.5]		M=[2]	
ε	E	ε	E	ε	E
0.1	1.088598	0.1	1.599957	0.1	2.086971
0.2	1.185324	0.2	1.698375	0.2	2.165646
0.3	1.288091	0.3	1.792648	0.3	2.236031
0.4	1.393747	0.4	1.880919	0.4	2.298643
0.5	1.498701	0.5	1.962190	0.5	2.354243
0.6	1.599749	0.6	2.036188	0.6	2.403658

Tabella 1. I valori di E al variare di M ed ε.

I valori dell'anomalia eccentrica possono esser ottenuti ricorrendo ad uno sviluppo in serie[8] del tipo:

$$2. \qquad E = M + \sum_{k=1}^{N} \frac{\varepsilon^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{d\,M^{k-1}} \sin^k M \;\text{ con }\; N \to +\infty .$$

In questo caso però, prima di procedere con le nostre indagini numeriche, dobbiamo fissare anche il numero di addendi della sommatoria che vogliamo prendere in considerazione. A fronte di questa ulteriore precisazione, riportiamo alcune valutazioni relative sempre ad E, ma al variare dei parametri M, ε ed N.

M=[1]

ε\N	2	5	20	100
0.1	1.088694	1.088598	1.088598	1.088598
0.2	1.186480	1.185308	1.185324	1.185324
0.3	1.293360	1.287857	1.288091	1.288091
0.4	1.409332	1.392193	1.393747	1.393747
0.5	1.534398	1.492078	1.498713	1.498701
0.6	1.668556	1.578686	1.600246	1.599749

M=[1.5]

ε\N	2	5	20	100
0.1	1.600455	1.599957	1.599957	1.599957
0.2	1.702321	1.698370	1.698375	1.698375
0.3	1.805599	1.792646	1.792648	1.792648
0.4	1.910288	1.881152	1.880918	1.880919
0.5	2.016387	1.963837	1.962174	1.962189
0.6	2.123899	2.042848	2.035497	2.036188

M=[2]

ε\N	2	5	20	100
0.1	2.087146	2.086972	2.086971	2.086971
0.2	2.166723	2.165669	2.165646	2.165646
0.3	2.238733	2.236253	2.236031	2.236031
0.4	2.303175	2.299705	2.298643	2.298643
0.5	2.360048	2.357694	2.354245	2.354243
0.6	2.409354	2.412438	2.403763	2.403657

Tabella 2. I valori di E al variare di M, ε ed N.

[8] Tale serie è nota come serie di Lagrange, in onore dello studioso che la determinò nel 1770.

Per valutare la bontà dell'approssimazione di E, ottenuta valutando la 2, effettuiamo un confronto fra i valori riportati nella tabella 1 e nella tabella 2.

M=[1]				
ε\N	2	5	20	100
0.1	0.000096	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.001156	-0.000016	0.000000	0.000000
0.3	0.005268	-0.000234	0.000000	0.000000
0.4	0.015585	-0.001554	0.000000	0.000000
0.5	0.035696	-0.006623	0.000011	0.000000
0.6	0.068808	-0.021063	0.000497	0.000000
M=[1.5]				
ε\N	2	5	20	100
0.1	0.000498	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.003946	0.000000	0.000000	0.000000
0.3	0.012951	0.000000	0.000000	0.000000
0.4	0.029369	0.000233	0.000000	0.000000
0.5	0.054198	0.001647	-0.000015	0.000000
0.6	0.087711	0.006661	-0.000691	0.000000
M=[2]				
ε\N	2	5	20	100
0.1	0.000174	0.000000	0.000000	0.000000
0.2	0.001077	0.000023	0.000000	0.000000
0.3	0.002702	0.000221	0.000000	0.000000
0.4	0.004531	0.001061	0.000000	0.000000
0.5	0.005806	0.003451	0.000000	0.000000
0.6	0.005696	0.008781	0.000105	0.000000

Tabella 3. Stima dell'errore di approssimazione di E.

Osservando la tabella 3, dobbiamo notare come, anche per valori piccoli di N, l'errore di approssimazione sia del tutto minimo; ovviamente all'aumentare di N l'errore è del tutto nullo.

Ulteriori considerazioni sulla limitazione di ε

Riportiamo, di seguito, alcune grafici relativi alla 2 per valori fissati di M. Osservando la figura 2 possiamo dedurre che per alcuni valori di ε, la 2 presenta un'anomalia, ed è proprio in tal senso che proseguiranno le nostre indagini. Molti studiosi si sono occupati della convergenza della 2 ed in particolare un primo confine superiore[9] per ε fu stabilito da Laplace (1823).

[9] $\varepsilon < 0.66$.

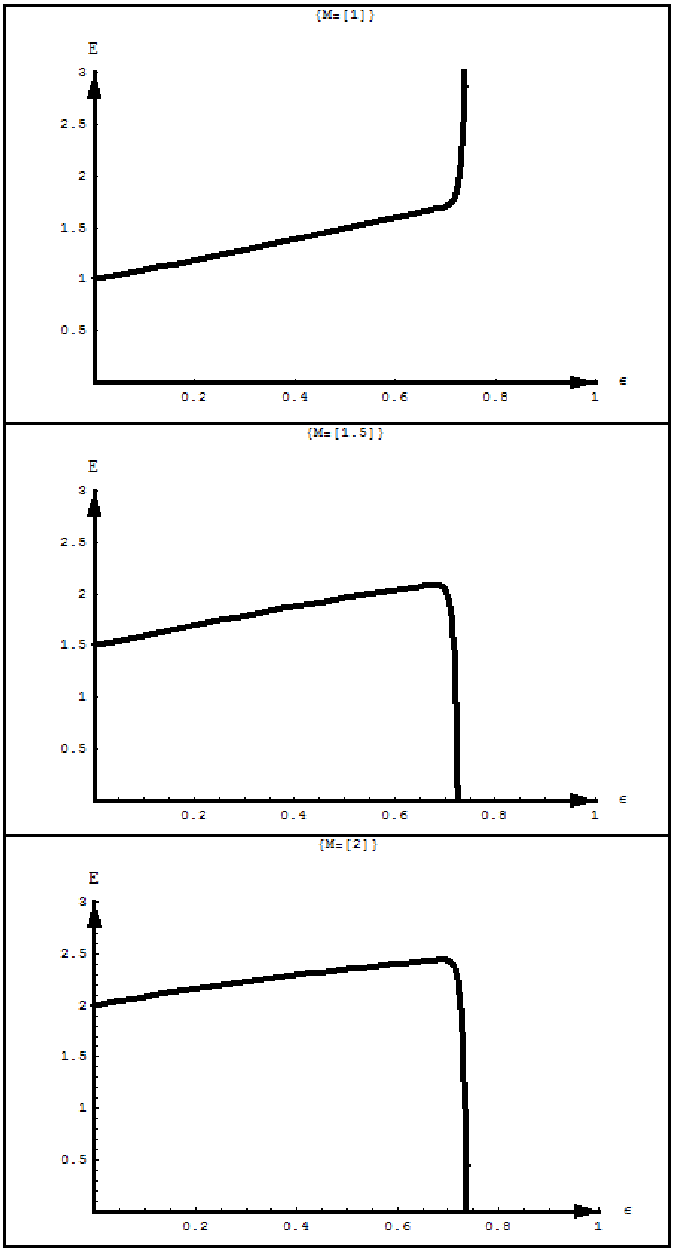

Figura 2. Andamento grafico di E al variare di M ed ε

Per le nostre indagini, fissato come contorno S il circolo γ di centro M e raggio ρ, avremo che $E = M + \rho e^{i\varphi}$, essendo $\varphi \in [-\pi, \pi]$ in modo da poter riscrivere la condizione di Rouché come:

$$3. \qquad \varepsilon \left| \frac{\sin\left(M + \rho e^{i\varphi}\right)}{\rho e^{i\varphi}} \right| < 1$$

e valutarla numericamente, al fine di capire quale sia la relazione fra ρ e φ.

M=[1]	ε=[0.5]			
ρ/φ	0.14	1.14	2.14	3.14
1	0.46200	0.71695	0.52248	0.00080
2	0.08127	0.78698	0.65093	0.21037
3	0.14233	1.27365	1.04080	0.15155
4	0.14169	2.36679	1.81763	0.01766
5	0.08230	4.69887	3.37411	0.07568
6	0.09336	9.71561	6.52694	0.07991
7	0.10816	20.66063	12.98900	0.01997
8	0.09037	44.85040	26.38792	0.04107
9	0.09331	98.90726	54.45937	0.05497
10	0.10701	220.84377	113.79799	0.02062

M=[1]	ε=[0.6]			
ρ/φ	0.14	1.14	2.14	3.14
1	0.55440	0.86034	0.62698	0.00096
2	0.09753	0.94437	0.78112	0.25244
3	0.17080	1.52837	1.24896	0.18186
4	0.17002	2.84015	2.18115	0.02119
5	0.09877	5.63865	4.04894	0.09082
6	0.11203	11.65873	7.83233	0.09590
7	0.12979	24.79276	15.58680	0.02397
8	0.10844	53.82048	31.66550	0.04928
9	0.11197	118.68871	65.35124	0.06596
10	0.12841	265.01252	136.55759	0.02475

M=[1]	ε=[0.7]			
ρ/φ	0.14	1.14	2.14	3.14
1	0.64679	1.00373	0.73147	0.00111
2	0.11378	1.10177	0.91130	0.29452
3	0.19927	1.78310	1.45712	0.21217
4	0.19836	3.31351	2.54468	0.02472
5	0.11523	6.57842	4.72376	0.10596
6	0.13070	13.60185	9.13772	0.11188
7	0.15143	28.92488	18.18460	0.02796
8	0.12651	62.79055	36.94308	0.05750
9	0.13064	138.47016	76.24312	0.07696
10	0.14981	309.18127	159.31719	0.02887

M=[1]	ε=[0.8]			
ρ/φ	0.14	1.14	2.14	3.14
1	0.73919	1.14712	0.83597	0.00127
2	0.13003	1.25917	1.04149	0.33659
3	0.22774	2.03783	1.66528	0.24248
4	0.22670	3.78687	2.90820	0.02825
5	0.13169	7.51820	5.39858	0.12109
6	0.14937	15.54497	10.44311	0.12786
7	0.17306	33.05701	20.78240	0.03196
8	0.14458	71.76063	42.22067	0.06571
9	0.14930	158.25161	87.13499	0.08795
10	0.17122	353.35003	182.07679	0.03300

Tabella 4. Valutazione numerica della 3 per $M = 1$ al variare dei valori ε, ρ e φ.

Conclusioni

Dalla tabella 4, appare come la 2 non sia sempre convergente. In particolare possiamo ribadire la convergenza semplice e non assoluta della serie di Lagrange ed, infine, una eventuale convergenza puntuale per valori di $\varepsilon > 0.7$.

Bibliografia

[1] Badolati E., Sintesi storica della risoluzione dell'equazione di Keplero per mezzo della serie di Lagrange, Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze, Lettere e Arti in Napoli, IV, vol. XLIII, Napoli, 1976.

[2] Badolati E., L'equazione di Keplero: storia e teoria, Il Sofisma, Università del Molise, 2000.

[3] Morici M., Sulla posizione del moto iperbolico, 6° Convegno Annuale della S.I.A., Università del Molise, 2006.

[4] Warson G.N., Bessel functions, Cambridge University Press, Cambridge, II ed., 1966.