Società Italiana di Archeoastronomia

Atti del
VI Congresso di Archeoastronomia, Storia dell'Astronomia Antica, Astronomia culturale e Astronomia Storica

Università degli Studi del Molise
Dipartimento di Scienze Economiche, Gestionali e Sociali
Campobasso, 22 - 23 settembre 2006

A cura di
Elio Antonello

INDICE

LE SERIE DI KAPTEYN IN MECCANICA CELESTE

DONATO DI IORIO
Università degli Studi del Molise

1. Introduzione

In questo lavoro, considerata l'equazione di Keplero:

$$M = E - \varepsilon \sin E \ , \ 0 < \varepsilon < 1 \ , \ 0 \le M \le 2\pi \ ,$$

viene tracciata la storia delle serie di Kapteyn, che traggono spunto dalla soluzione della stessa equazione di Keplero, attraverso una serie trigonometrica i cui coefficienti sono riconducibili alle funzioni di Bessel di prima specie.

Rinviando ad un testo di astronomia (ad esempio L. Rosino) per le definizioni delle anomalie, ricordiamo che all'argomento hanno contribuito Lagrange, che calcolò solo alcuni termini della sviluppo di E (anomalia eccentrica) e di r (raggio vettore), Bessel, che, attraverso le serie di Fourier, ricavò in funzione di M (anomalia media) e di ε, l'anomalia eccentrica E, il raggio vettore r e l'anomalia vera w ed, infine, l'astronomo olandese Kapteyn.

2. Le serie di Kapteyn, le serie trigonometriche e le serie di Fourier

Ai fini dell'applicazione astronomica ci limiteremo a considerare tutte le funzioni incontrate ristrette al campo reale. A tal riguardo diamo alcuni cenni sulle serie di Kapteyn, sulle serie trigonometriche e sulle serie di Fourier.

Una serie di Kapteyn nel campo reale è una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n J_{v+n} \{(v+n)x\} \qquad x \in \mathrm{R}$$

in cui v e i coefficienti α_n sono delle costanti reali, mentre $J_{v+n}(x)$ è una funzione di Bessel di prima specie. Se $v = 0$ oppure se v è un intero positivo $J_{v+n}(x)$ indica una funzione di Bessel di prima specie e di ordine intero ovvero il coefficiente di Bessel.

Una serie trigonometrica è una serie del tipo:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ , \ a_o, a_n, b_n \in \mathrm{R} \ , \ x \in \mathrm{R} \ .$$

Poiché il termine generale della suddetta serie è periodico di periodo 2π, essa può essere studiata in un qualunque intervallo di ampiezza 2π.

Per quanto riguarda le serie trigonometriche ricordiamo qualche fondamentale risultato. Se la funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π, ha finiti nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ i seguenti integrali:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \ ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \ ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \ ,$$

$$n=1,2,\dots \ ,$$

detti coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$, allora la serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

si chiama serie di Fourier associata alla funzione $f(x)$.

Il problema della convergenza delle serie di Fourier è complesso e si conoscono solo criteri sufficienti. Se $f(x)$ è periodica di periodo 2π, generalmente continua (con discontinuità solo di prima specie), con derivata prima avente solo discontinuità di prima specie, allora la corrispondente serie di Fourier converge per tutti i valori di x. Nei punti di discontinuità di prima specie della funzione, in cui esistono i valori della derivata destra e sinistra, la serie converge alla media aritmetica del limite sinistro e destro della $f(x)$.

Nei punti in cui la funzione $f(x)$ (periodica di periodo 2π e definita in $[-\pi,\pi]$) è continua e derivabile per la somma $S(x)$ della serie di Fourier associata si ha:

$$S(x) = f(x) \, .$$

Nel caso che la funzione $f(x)$, soddisfacente le suddette condizioni, sia anche una funzione pari ($f(x) = f(-x)$), cioè simmetrica rispetto all'asse delle y, poiché $f(x)\cos nx$ è pari e $f(x)\sin nx$ è dispari, se essa viene sviluppata in serie di Fourier, si ha:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx \ ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0 \ ;$$

in tal caso la funzione $f(x)$ è espressa mediante una serie di coseni.

Nel caso che la funzione $f(x)$, soddisfacente le suddette condizioni, sia anche una funzione dispari $(f(x) = -f(-x))$, cioè simmetrica rispetto all'origine, poiché $f(x)\cos nx$ è dispari e $f(x)\sin nx$ è pari, se essa viene sviluppata in serie di Fourier, si ha:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0 \quad ,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0 \quad ,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad ;$$

in tal caso la funzione $f(x)$ è espressa mediante una serie di seni.

3. La soluzione di Bessel per il problema di Keplero

Ritornando all'equazione di Keplero occorre ricordare che l'anomalia eccentrica è ignota, mentre, conoscendo l'orbita ed il suo periodo, M (al tempo t) e ε sono note (con $0 < \varepsilon < 1$ e $0 \le M \le 2\pi$).

Infatti, considerando al tempo t=0 il pianeta posizionato al perielio, l'area descritta al generico tempo t dal raggio vettore, che unisce il sole, posizionato nel fuoco dell'ellisse orbitale, al pianeta, è data da:

$$\frac{1}{2}ab(E - \varepsilon\sin E) \qquad (\varepsilon \text{ è l'eccentricità});$$

inoltre, per la seconda legge di Keplero si ha:

$$\frac{\frac{1}{2}ab(E - \varepsilon\sin E)}{t} = \frac{\pi ab}{T} \quad ,$$

dunque:

$$E-\varepsilon\sin E=\frac{2\pi}{T}t\ .$$

Quindi al tempo t l'anomalia media M è data da:

$$M=\frac{2\pi}{T}t\ ,$$

ovvero dal prodotto della velocità angolare media per il tempo.

In definitiva risulta:

$$M=E-\varepsilon\sin E\ ,\ 0<\varepsilon<1\ ,\quad 0\le M\le 2\pi \qquad (3.1)$$

(per $M=0$ e per $M=2\pi$ la posizione del pianeta è la stessa, cioè quella occupata al tempo t=0).

La suddetta relazione, detta equazione di Keplero, introdotta da questo grande astronomo nel 1609, data di pubblicazione dell'Astronomia Nova, è stata studiata per oltre tre secoli con molti contributi e metodi risolutivi. Tra questi è senz'altro di estrema importanza quello di Bessel basato sull'uso delle serie trigonometriche.

Occorre premettere che dall'equazione stessa si nota che (essendo ε costante nel caso di moto non perturbato) è impossibile esprimere in modo elementare la variabile E in funzione di M , anche se si può approssimare la soluzione in modo adeguato mediante il classico metodo di iterazione. Inoltre, posto $E=E(M)$, essa risulta continua, limitata e periodica di periodo 2π .

La funzione $E(M)$ è anche crescente, infatti derivando la (3.1) si ha:

$$E'-\varepsilon\cos E\cdot E'=1$$

$$E'=\frac{1}{1-\varepsilon\cos E}>0$$

Si ha anche che l'anomalia eccentrica come l'anomalia media *M* aumenta di 2π ogni orbita. Pertanto, convenendo di far variare le anomalie in tutto R, si può procedere allo sviluppo di *E* in serie di Fourier rispetto ad *M*.

Essendo $\varepsilon\sin E$ una funzione periodica dispari di *M* si ha:

$$\varepsilon\sin E=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin nM \qquad (3.2)$$

$$\text{dove}\quad A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varepsilon\sin E\sin nM dM\ .$$

Per trovare il valore di A_n si integra per parti, infatti si ottiene:

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon \sin E \sin nM dM =$$

$$= \left[-\frac{2\varepsilon \sin E \cos nM}{n\pi} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos nM \frac{d(\varepsilon \sin E)}{dM} dM =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos nM \frac{dE - dM}{dM} dM =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos nM dE = \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon).$$

Tenendo presente le (3.1) e (3.2), risulta:

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon) \sin nM.$$

Questo risultato rappresenta la soluzione analitica completa del problema di Keplero riguardante l'anomalia eccentrica. La precedente serie è una serie di Kapteyn che, per quanto riguarda il problema astronomico, converge velocemente per $\varepsilon < 1$.

E' bene puntualizzare che ai tempi di Bessel ancora non esisteva una teoria relativa alle funzioni cilindriche e che il grande astronomo tedesco portò avanti autonomamente uno studio approfondito dell'integrale:

$$\int_0^{\pi} \cos n(E - \varepsilon \sin E) dE \quad ,$$

che pure era stato incontrato precedentemente da Eulero. L'analisi di Bessel per i risultati conseguiti trovò tra i matematici un apprezzamento maggiore, per cui, su proposta di Lommel, queste funzioni passarono alla storia come funzioni di Bessel.

4. Le serie di Neumann e di Kapteyn nel campo complesso

Una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{v+n}(z)$$

in cui v e i coefficienti α_n sono delle costanti è chiamata serie di Neumann. Le serie di Neumann convergono nel dominio in cui risulta:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\{a_n J_{v+n}(z)\}\right|} < 1 \ .$$

Nel caso delle serie di Neumann si può esprimere ognuna delle funzioni di Bessel in serie di potenze di *z* e quindi riordinare la serie doppia ottenuta come una serie di potenze il cui dominio di convergenza è quello originario della serie di Neumann.

Le serie di Kapteyn nel campo complesso sono delle serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n J_{v+n}\{(v+n)z\}$$

in cui v e i coefficienti α_n sono delle costanti, mentre $J_{v+n}(z)$ è una funzione di Bessel di prima specie.

Si dimostra che esse sono non solo convergenti ma rappresentano anche una funzione analitica nel dominio in cui risulta:

$$\left|\frac{z \exp\sqrt{1-z^2}}{1+\sqrt{1-z^2}}\right| < \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left|\sqrt[v+n]{\alpha_n}\right|} \ .$$

La serie doppia ottenuta scrivendo ciascuna funzione di Bessel in serie di potenze di *z* è assolutamente convergente soltanto nel dominio in cui risulta:

$$\frac{|z| \exp\sqrt{1-|z|^2}}{1+\sqrt{1-|z|^2}} < \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left|\sqrt[v+n]{\alpha_n}\right|} \ .$$

Il secondo dominio è più piccolo del primo. Quando il limite risulta essere uguale ad 1, il primo dominio è la parte interna ad una curva ovale simmetrica rispetto agli assi, avente due cuspidi nei punti $(-1{,}0), (0{,}1)$, con il diametro maggiore che unisce i punti $(-1{,}0), (0{,}1)$ e quello minore che congiunge i punti $(0,-0.6627434i), (0,0.6627434i)$; mentre il secondo è soltanto la parte interna della circonferenza $|z|$=0.6627434.

Le serie di Kapteyn traggono il loro nome dal fatto che Kapteyn le studiò come funzioni della variabile complessa *z* in un suo importante lavoro del 1893. Nel suddetto studio Kapteyn esaminò la possibilità di esprimere una arbitraria funzione analitica in tale serie e, in generale, tentò di sistemare la teoria di tali serie in una posizione similare a quella che era stata occupata dalle serie di Neumann. Sebbene le proprietà delle serie di Kapteyn siano più particolari rispetto a quelle delle serie di Neumann, le serie di Kapteyn hanno maggiore importanza nelle applicazioni pratiche. La loro prima apparizione avvenne nella soluzione del problema di Keplero, che fu risolto prima da Lagrange e successivamente mezzo secolo più tardi da Bessel. Più recentemente sono state utilizzate nella teoria moderna della radiazione elettromagnetica.

5. La biografia di J. C. Kapteyn

J. C. Kapteyn nacque nel villaggio di Barneveld in Olanda il 19/1/1851. Nel 1868 andò a studiare matematica e fisica all'Università di Utrecht. Nel 1875 terminò la sua tesi e fu quindi nominato osservatore all'osservatorio astronomico di Leiden. Tre anni dopo diventò professore di astronomia all'Università di Groningen. Nel 1879 sposò Catharina Elizabeth Kalshoven ed ebbe negli anni successivi due figlie ed un figlio. Kapteyn inizialmente si dedicò agli studi teorici di matematica con suo fratello Willem, professore di matematica. Collaborò, quindi, con David Gill direttore dell'osservatorio astronomico di Città del Capo. Tra il 1896 e il 1900, in seguito alla suddetta collaborazione, fu pubblicata la Cape Photographic Durchmusterung nella quale venivano elencate le posizioni e le grandezze di 454875 stelle nell'emisfero del sud. Per tale pubblicazione Kapteyn ricevette la medaglia d'oro della società astronomica reale. Mentre era in corso il suddetto studio, nel 1892 e nel 1893, apparirono i suoi due primi lavori sulla distribuzione delle stelle nello spazio, nei quali si stabiliva l'esistenza del "gruppo locale" ossia di quel raggruppamento di stelle situato nelle nostre vicinanze simili al sole. Il suo obiettivo principale era rappresentato dall'indagine della struttura dell'universo; a tal fine utilizzò il metodo statistico, diventando il fondatore dell'astronomia statistica.

Egli ricavò le seguenti leggi:

1) la legge della frequenza dell'intensità luminosa assoluta,
2) la legge della densità stellare a diverse distanze dal sole.

Tenendo presente ciò il sole fu stimato posto in un luogo di densità quasi massima; l'universo venne rappresentato come un ellissoide appiattito. Questo risultato venne poi rettificato per l'assorbimento interstellare della luce. L' "universo" di Kapteyn rappresentava in realtà solo una piccola parte della Via Lattea. Egli scoprì anche che i moti stellari non si manifestano senza alcuna regola, ma preferenzialmente secondo due direzioni opposte. Ideò un importante progetto per lo studio della distribuzione delle stelle nella galassia. Per tale ricerca occorreva considerare statisticamente anche le stelle più deboli; a tal scopo, essendo il loro numero molto grande, decise di selezionare circa duecento zone del cielo, accuratamente determinate, nelle quali si sarebbero dovuti trovare la lontananza, la luminosità, la velocità e lo spettro di tutte le stelle raggiungibili. Il suddetto lavoro, denominato Plan of selected areas, fu accolto con entusiasmo ed iniziò nel 1906. Divenne il più grande progetto internazionale in collaborazione dell'astronomia e coinvolse oltre 40 osservatori. Andò in pensione nel 1921 all'età di 70 anni. Nel 1922 pubblicò "First attempt at a theory of the arrangement and motion of the sidereal system" in cui descrisse la forma della nostra galassia precisando che la sua densità decresce allontanandosi dal centro. Affermò, inoltre, che il sole si trova relativamente vicino al centro della galassia (40000 anni luce di dimensioni). Specificò, infatti, che il sole è posto a 2000 anni luce dal centro della galassia. Successivamente R. J. Trumpler affermò che le dimensioni della galassia sono uguali a 100000 anni luce e stimò che il sole è situato ad una distanza di 30000 anni luce dal suo centro. Kapteyn morì ad Amsterdam il 18/6/1922.

Bibliografia

1. E. Badolati, On the history of Kepler's equation, Vistas in Astronomy vol. 28 parts 1/2 pp. 343-345, Pergamon Press, 1985

2. A. Blaauw, J. A. de Boer, E Dekker, J. Schuller tot Peursum-Meijer, History of astronomy at Groningen University, Universiteitsmuseum, Groningen, 1983

3. Enciclopedia scienziati e tecnologi contemporanei, voce Kapteyn, vol. II, Arnoldo Mondatori Editore, Milano, 1974

4. Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti di Giovanni Treccani, voce Kapteyn, vol. XX, Roma, 1933

5. Henrietta Hertzsprung-Kapteyn, The life and works of J. C. Kapteyn, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993

6. W. Kapteyn, Recherches sur les fonctions de Fourier-Bessel, Ann. Sci. de l'Ecole norm. sup. (3) x, 1893, pp. 91-120

7. W. Kapteyn, On a series of Bessel function (Dec. 24, 1904), Proc. Section of Sci., K. Akad. van Wet. te Amsterdam, VII (1905), pp. 494-500

8. K. Lawrynowicz, F. W. Bessel, Birkhauser Verlag, Basel, 1995

9. E. G. Plummer, Dynamical astronomy, Cambridge University Press, Cambridge, 1918, ch. III

10. L. Rosino, Lezioni di astronomia, Cedam, Padova, 1982

11. F. G. Tricomi, Funzioni speciali, Editrice Gheroni, Torino, 1962

12. F.G. Tricomi, Serie ortogonali di funzioni, Editrice Gheroni, Torino, 1961

13. G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, II edizione, Cambridge University Press, ristampa 1996

14. A. Zygmund, Trigonometric series, III edizione, Cambridge University Press, Cambridge, 2