

Società Italiana di Archeoastronomia

Atti del  
VI Congresso di Archeoastronomia, Storia dell'Astronomia Antica,  
Astronomia culturale e Astronomia Storica

*Università degli Studi del Molise*  
*Dipartimento di Scienze Economiche, Gestionali e Sociali*  
*Campobasso, 22 - 23 settembre 2006*

A cura di  
Elio Antonello

## INDICE

Presentazione .....	pag. 1
<i>Elio Antonello</i>	
Prefazione. Ricordo di Alberto Masani e Vittorio Castellani .....	pag. 3
<i>Elio Antonello</i>	
Rallentamento secolare della Terra. Raccordo tra diversi metodi per la stima del suo valore .....	pag. 5
<i>Sigfrido Leschiutta e Patrizia Tavella</i>	
La scienza astronomica in E.A. Poe .....	pag. 23
<i>Ennio Badolati</i>	
Il “caso” della nebulosa di Andromeda .....	pag. 29
<i>Francesco Castaldi</i>	
Regiomontano e dal Pozzo Toscanelli, artefici della rinascita dell’astronomia nel mondo occidentale .....	pag. 43
<i>Franca De Angelis Mangianti, Cesare Mangianti e Letizia Buffoni</i>	
La cosmologia settecentesca e gli interessi astronomici di Gregorio Piccoli del Faggiol .....	pag. 53
<i>Massimo Tinazzi</i>	
L’equazione di Hill nella teoria del moto lunare .....	pag. 67
<i>Ennio Badolati e Teresa Boccia</i>	
Sulla convergenza del determinante di Hill .....	pag. 79
<i>Sandra Ciccone</i>	
Sulla posizione nel moto iperbolico .....	pag. 91
<i>Marina Morici</i>	
La serie di Kapteyn in meccanica celeste .....	pag. 99
<i>Donato Di Iorio</i>	
Sull’insieme di convergenza della serie di Lagrange nella Meccanica Celeste .....	pag. 107
<i>Pasquale Lavorgna</i>	
La fenice svelata: nuova interpretazione astronomica di un mito millenario .....	pag. 113
<i>Giuseppe De Cesaris</i>	
Le meridiane di Larinum antiche e moderne.....	pag. 123
<i>Napoleone Stelluti</i>	

# SULLA POSIZIONE NEL MOTO IPERBOLICO

MARINA MORICI

*Ph. D. in “Teoria e Metodi Quantitativi per l’Analisi dello Sviluppo”*

*Università del Molise*

*morici@unimol.it*

## Abstract

Nel moto kepleriano di un secondario attorno a un primario, esiste anche il caso, non comune, iperbolico. La posizione si determina con un’equazione analoga a quella di Keplero nel caso ellittico e di tale equazione vengono esaminati alcuni metodi risolutivi.

## 1. Introduzione

Da sempre gli studiosi di astronomia sono stati affascinati dallo studio dei pianeti e dalle equazioni esprimenti il relativo moto, generando nei secoli, grazie ai loro contributi, un’importantissima e vastissima letteratura. Ma sicuramente l’espressione che da sempre ha destato più curiosità rispetto alle altre relazioni e quindi più studiata è la celebre equazione di Keplero<sup>1</sup>

$$1.1 \quad E - \varepsilon \operatorname{sen} E = M$$

dove sono assegnate  $M$  ( con  $0 \leq M \leq 2\pi$  ) ed  $\varepsilon$  ( con  $0 < \varepsilon < 1$  ), mentre  $E$  è da determinare.

Nonostante l’aspetto semplice, questa equazione costituisce un problema molto complesso per uno studio non numerico essendo un’equazione trascendente. Lo stesso Keplero si rese conto della difficoltà e cercò la soluzione applicando la regola della falsa posizione, che a quel tempo era, in pratica, l’unico metodo numerico disponibile. Tanti sono stati i metodi applicati, basta ricordare quello grafico, l’iterativo, l’approssimazione per serie<sup>2</sup>, la formula di Picassi ed altri ancora.

Poco studiati, ma per questo non meno importanti ed interessanti, sono i moti iperbolici e parabolici che rappresentano i moti di altri corpi celesti.

## 2. L’orbita iperbolica

Le orbite iperboliche sono fondamentali in astronomia in quanto servono a descrivere il moto delle comete e delle meteore, ma sono utilizzate anche in diversi studi dell’astrodinamica. Ricordiamo che l’equazione canonica dell’iperbole, con eccentricità

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \text{ risulta}$$

---

<sup>1</sup> Cfr. [1][2].

<sup>2</sup> Cfr. [4].

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dove  $a$  rappresenta la lunghezza del semiasse maggiore,  $b$  la lunghezza del semiasse minore e  $b^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1)$ ; mentre l'equazione polare risulta essere

$$\rho = \frac{b^2}{a(1 + \varepsilon \cos \vartheta)}$$

sapendo che  $b^2 = c^2 - a^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1)$  e posto  $r = \rho$  e  $f = \vartheta$ , si ha

$$2.1 \quad r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon \cos f}.$$

In casi particolari, ponendo  $f = 0$  risulta

$$r = a(\varepsilon - 1),$$

mentre per  $r \rightarrow +\infty$  si ottiene

$$1 + \varepsilon \cos f = 0$$

$$\cos f = -\frac{1}{\varepsilon}$$

$$f = \pi \pm \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Dalla relazione 2.1 si ricava

$$\cos f = \frac{a(\varepsilon^2 - 1) - r}{r\varepsilon}$$

da cui

$$f = \arccos\left(\frac{a(\varepsilon^2 - 1) - r}{r\varepsilon}\right),$$

che, derivata rispetto a  $t$ , diviene

$$\frac{df}{dt} = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{r[(a+r)^2 - a^2\varepsilon^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Ricordando che l'integrale di area è  $r^2 \dot{f} = h = \sqrt{\mu p}$  e che  $\mu = v^2 a^3$ , risulta

$$2.2 \quad v \frac{dt}{dr} = \frac{r}{a \left[ (a+r)^2 - a^2 \varepsilon^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

Definita l'anomalia eccentrica iperbolica  $F$  dalla relazione  $r = a(\varepsilon \cosh F - 1)$ , da cui  $\cosh F = \frac{a+r}{a\varepsilon}$ , l'equazione 2.2 diviene

$$v \frac{dt}{dF} = \varepsilon \cosh F - 1.$$

Integrando e ponendo  $N = v(t - \tau)$ , si ottiene l'equazione del moto iperbolico

$$2.3 \quad \varepsilon \sinh F - F = N$$

che, come per l'equazione di Keplero, è un'equazione trascendente in cui sono noti  $N$  ed  $\varepsilon$  (con  $\varepsilon > 1$ ), mentre  $F$  è da determinare.

### 3. Metodo Grafico

Il primo metodo applicato è il Metodo Grafico che consiste nel riscrivere l'equazione  $\varepsilon \sinh F - F = N$  come

$$\sinh F = \frac{F + N}{\varepsilon}.$$

Dalla posizione

$$y = \sinh F$$

$$y = \frac{F + N}{\varepsilon}$$

e dall'intersezione delle due curve si ha, per  $N = 1$  ed  $\varepsilon = 1.1$ , che l'unica<sup>3</sup> soluzione verificante l'equazione trascendente appartiene all'intervallo  $[1, 2]$ .

### 4. Metodo Iterativo

Ricordiamo che un'equazione  $x = \Phi(x)$  che ammette come soluzione  $c \in [a, b]$  si dice risolvibile per iterazione se la successione  $x_n$

---

<sup>3</sup> L'unicità della soluzione è data dal fatto che la derivata prima è sempre positiva.

$$\begin{aligned}x_1 &= \Phi(x_0) \\x_2 &= \Phi(x_1) \\x_3 &= \Phi(x_2) \\&\dots\end{aligned}$$

ammette come limite  $c$ , ovvero se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = c$ .

Dall'equazione del moto iperbolico 2.3, si ricava l'espressione

$$F = \text{settsenh}\left(\frac{F + N}{\varepsilon}\right)$$

che diviene per il metodo iterativo

$$\left\{\begin{aligned}F_0 &= 1 \\F_1 &= \text{settsenh}\left(\frac{F_0 + N}{\varepsilon}\right) \\F_2 &= \text{settsenh}\left(\frac{F_1 + N}{\varepsilon}\right) \\F_3 &= \text{settsenh}\left(\frac{F_2 + N}{\varepsilon}\right) \\&\dots\end{aligned}\right.$$

Nel caso in cui  $N = 1$  ed  $\varepsilon = 1.1$ , risulta

$$\left\{\begin{aligned}F_0 &= 1 \\F_1 &= 1,35923 \\F_2 &= 1,50656 \\F_3 &= 1,56174 \\F_4 &= 1,58172 \\F_5 &= 1,58886 \\F_6 &= 1,59141 \\F_7 &= 1,59231 \\F_8 &= 1,59263\end{aligned}\right.$$

da cui

$$F \cong 1,592.$$

## 5. Metodo Dicotomico

Partendo dall'equazione trascendente esprimente il moto iperbolico, posto  $N = 1$  e  $\varepsilon = 1.1$  nell'intervallo  $[1, 2]$ , si considera l'espressione

$$5.1 \quad h(F) = \varepsilon \sinh F - F - N$$

che assume negli estremi i valori

$$h(1) = -0,707$$

$$h(2) = 0,989$$

I valori discordi trovati confermano ciò che era già noto dal metodo grafico, ovvero che nell'intervallo considerato c'è la soluzione cercata. Facendo uso del punto medio, il metodo consiste nel restringere l'intervallo in cui si trova la soluzione attraverso l'individuazione di intervalli più piccoli in cui la funzione assume valori discordi agli estremi.

Nel nostro caso, dato l'intervallo  $[1, 2]$  si prende il punto medio  $c_0 = 1,5$  e si valuta in esso la funzione ottenendo  $h(c_0) = -0.158$ ; successivamente si prende l'intervallo  $[1,5, 2]$ , dal momento che la funzione ha valori opposti ai suoi estremi. Reiterando il procedimento, si ottiene un punto intermedio pari a  $1.592$ , che offre una buona approssimazione della soluzione cercata.

## 6. Sviluppo in serie

In questo paragrafo, si cerca di sviluppare la soluzione  $F$  dell'equazione  $\varepsilon \sinh F - F = N$  in serie rispetto ad  $N$ . Considerando lo sviluppo in serie della funzione seno arrestandoci al terzo termine e ponendo

$$6.1 \quad \begin{aligned} N &= y \\ F &= x \end{aligned}$$

l'equazione 2.3 si può scrivere

$$y = (\varepsilon - 1)x + \frac{\varepsilon}{3!}x^3 + \frac{\varepsilon}{5!}x^5.$$

Indicando con

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = \varepsilon - 1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = \frac{\varepsilon}{3!} \\ \dots \end{array} \right.$$

i coefficienti delle  $x$ , dalla posizione

$$u = \frac{y - \alpha_0}{\alpha_1}$$

$$a_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_1}$$

si ha

$$u = x + \frac{\varepsilon}{3!(\varepsilon - 1)} x^3 + \frac{\varepsilon}{5!(\varepsilon - 1)} x^5$$

che, grazie al metodo d'inversione delle serie di potenze, diventa

$$x = u - \frac{\varepsilon}{3!(\varepsilon - 1)} u^3 + \left( 3 \left( \frac{\varepsilon}{3!(\varepsilon - 1)} \right)^2 - \frac{\varepsilon}{5!(\varepsilon - 1)} \right) u^5.$$

Dopo alcuni passaggi algebrici e riutilizzando le relazione 6.1, si ottiene

$$F = \frac{1}{\varepsilon - 1} \left[ N - \frac{\varepsilon}{3!(\varepsilon - 1)^3} N^3 + \left( \frac{10\varepsilon^2 - \varepsilon(\varepsilon - 1)}{120(\varepsilon - 1)} \right) \frac{N^5}{(\varepsilon - 1)^5} \right].$$

## 7. Conclusioni

Dalle indagini svolte, si può affermare che fissato  $N$  e all'aumentare di  $\varepsilon$ , la retta  $y = \frac{F + N}{\varepsilon}$ , che interseca la curva  $y = \sinh F$ , diminuisce la sua pendenza e quindi l'ampiezza massima si ha per valori prossimi ad  $\varepsilon$ ; inoltre l'estremo inferiore dell'intervallo di appartenenza di  $F$  coincide con  $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$ . Fissando, invece,  $\varepsilon$  e facendo

variare  $N$  nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$  risulta che  $-2,302734 < F < 2,302734$ . Tali estremi, infine, sono anche i valori limite assunti da  $F$  per  $-\pi < N < \pi$  e  $\forall \varepsilon > 1$ .

### **Bibliografia**

- [1] Badolati E., *Sintesi storica della risoluzione dell'equazione di Keplero per mezzo della serie di Lagrange*, Estratto dal rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della società Nazionale di Scienze, Lettere e Arti in Napoli, Serie IV, Vol. XLIII, 1976
- [2] Badolati E., *L'equazione di Keplero: Storia e Teoria*, Convegno Il Sofisma, Università del Molise, Campobasso, 2000
- [3] Fitzpatrick P.M., *Principles of Celestial Mechanics*, Academic Press, Newyork, 1970
- [4] Lavorgna P., *Sull'insieme di convergenza della serie di Lagrange nella meccanica celeste*, 6° Convegno SIA, Università del Molise, Campobasso, 2006
- [5] Roy A.E. , *Orbital Motion*, Adam Hilger, Bristol, seconda edizione, 1982