

Società Italiana di Archeoastronomia

Atti del
VI Congresso di Archeoastronomia, Storia dell'Astronomia Antica,
Astronomia culturale e Astronomia Storica

Università degli Studi del Molise
Dipartimento di Scienze Economiche, Gestionali e Sociali
Campobasso, 22 - 23 settembre 2006

A cura di
Elio Antonello

INDICE

Presentazione	pag. 1
<i>Elio Antonello</i>	
Prefazione. Ricordo di Alberto Masani e Vittorio Castellani	pag. 3
<i>Elio Antonello</i>	
Rallentamento secolare della Terra. Raccordo tra diversi metodi per la stima del suo valore	pag. 5
<i>Sigfrido Leschiutta e Patrizia Tavella</i>	
La scienza astronomica in E.A. Poe	pag. 23
<i>Ennio Badolati</i>	
Il “caso” della nebulosa di Andromeda	pag. 29
<i>Francesco Castaldi</i>	
Regiomontano e dal Pozzo Toscanelli, artefici della rinascita dell’astronomia nel mondo occidentale	pag. 43
<i>Franca De Angelis Mangianti, Cesare Mangianti e Letizia Buffoni</i>	
La cosmologia settecentesca e gli interessi astronomici di Gregorio Piccoli del Faggiol	pag. 53
<i>Massimo Tinazzi</i>	
L’equazione di Hill nella teoria del moto lunare	pag. 67
<i>Ennio Badolati e Teresa Boccia</i>	
Sulla convergenza del determinante di Hill	pag. 79
<i>Sandra Ciccone</i>	
Sulla posizione nel moto iperbolico	pag. 91
<i>Marina Morici</i>	
La serie di Kapteyn in meccanica celeste	pag. 99
<i>Donato Di Iorio</i>	
Sull’insieme di convergenza della serie di Lagrange nella Meccanica Celeste	pag. 107
<i>Pasquale Lavorgna</i>	
La fenice svelata: nuova interpretazione astronomica di un mito millenario	pag. 113
<i>Giuseppe De Cesaris</i>	
Le meridiane di Larinum antiche e moderne.....	pag. 123
<i>Napoleone Stelluti</i>	

SULLA CONVERGENZA DEL DETERMINANTE DI HILL

SANDRA CICCONE

Università del Molise

Sunto

Preso in considerazione il determinante infinito di Hill, vengono studiati taluni aspetti numerici, vale a dire lo studio della convergenza e il calcolo delle radici caratteristiche. Chiudono l'esposizione riferimenti storici e bibliografici.

Abstract

By considering the Hill's infinite determinant, we analyze some numerical aspects, such as the study of the convergence and the valuation of the characteristic roots. At the end of the paper we make some historical and bibliographical notes.

1. Introduzione ai determinanti infiniti

Sia $A_{i,k}$ ($i, k = -\infty, \dots, +\infty$) una doppia successione infinita di termini che rappresenteremo sotto forma di matrice, considerando il termine $A_{0,0}$ come origine, in modo da avere

$$\left(\begin{array}{ccccccc} & & & \dots & & & \\ & A_{-3,-3} & A_{-3,-2} & A_{-3,-1} & A_{-3,0} & A_{-3,1} & A_{-3,2} & A_{-3,3} \\ & A_{-2,-3} & A_{-2,-2} & A_{-2,-1} & A_{-2,0} & A_{-2,1} & A_{-2,2} & A_{-2,3} \\ & A_{-1,-3} & A_{-1,-2} & A_{-1,-1} & A_{-1,0} & A_{-1,1} & A_{-1,2} & A_{-1,3} \\ \dots & A_{0,-3} & A_{0,-2} & A_{0,-1} & A_{0,0} & A_{0,1} & A_{0,2} & A_{0,3} & \dots \\ & A_{1,-3} & A_{1,-2} & A_{1,-1} & A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ & A_{2,-3} & A_{2,-2} & A_{2,-1} & A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ & A_{3,-3} & A_{3,-2} & A_{3,-1} & A_{3,0} & A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \\ & & & \dots & & & & \end{array} \right)$$

Il termine D_m indica il determinante composto dalle quantità $A_{i,k}$ ($i, k = -m, \dots, m$). Se per m tendente ad infinito D_m tende ad un limite D , allora il determinante infinito D_∞ composto dalle quantità $A_{i,k}$ ($i, k = -\infty, \dots, \infty$) si dice convergente e D è il valore di questo determinante. In altri termini il determinante infinito D_∞ è convergente se, per ogni $\delta > 0$, esiste un $n' \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > n'$ e per qualsiasi p si abbia

$$|D_{n+p} - D_n| < \delta.$$

Ove non dovesse esistere il limite D , il determinante verrà detto divergente.

L'elemento $A_{0,0}$ è chiamata l'*origine* del determinante; la *diagonale principale* del determinante¹ D_∞ è formata dal gruppo di elementi che si trovano lungo la diagonale passante per l'origine, ovvero è formata dagli elementi $A_{i,i}$ ($i = -\infty, \dots, \infty$); la *linea* i è costituita dagli elementi $A_{i,k}$ ($k = -\infty, \dots, \infty$), mentre la *colonna* k è formata dagli elementi $A_{i,k}$ ($i = -\infty, \dots, \infty$).

2. Sintesi storica sui determinanti infiniti

I primi risultati sui sistemi lineari si trovano in Leibniz. Di seguito, per lo più nel corso del diciottesimo e diciannovesimo secolo, i sistemi lineari furono risolti attraverso il metodo delle eliminazioni successive². Nel 1750 G. Cramer³ introdusse, per i sistemi di ordine 3, la regola che oggi porta il suo nome, senza però utilizzare il concetto di determinante.

I sistemi infiniti vennero utilizzati nel XVIII e XIX secolo per ottenere soluzioni formali per equazioni differenziali attraverso il metodo dei coefficienti indeterminati. Ma questa metodologia diede solo un minimo contributo allo sviluppo della teoria generale dei sistemi infiniti. J. Fourier⁴ si occupò del problema della risoluzione dei sistemi di infinite equazioni dimostrando che ogni funzione poteva essere rappresentata da una combinazione lineare infinita di termini trigonometrici. L'approccio di Fourier (denominato da F. Riesz *principio dei residui*) consisteva nel risolvere prima un sistema $n \times n$ (ovvero di ordine n) attraverso metodi ordinari e poi far tendere n ad infinito.

Nel 1877 l'astronomo americano G.W. Hill⁵, nell'ambito dello studio del moto del perigeo della Luna, ebbe ad imbattersi nella risoluzione di un sistema di infinite equazioni lineari, problema che aveva come fondamento essenziale la considerazione di determinanti infiniti e, difatti, l'astronomo americano intese molto bene che questo nuovo strumento di calcolo era indispensabile per affrontare e studiare la teoria della Luna. Ma le sue considerazioni, pur se sostanzialmente giuste, non avevano il requisito fondamentale della completezza ed in questo senso Poincaré⁶, nel 1886, diede una sistemazione alla teoria dei determinanti infiniti. La sua analisi portò ai seguenti risultati:

1. ogni determinante in cui la diagonale principale è composta da elementi pari ad 1, converge se la somma degli elementi non appartenenti alla diagonale principale converge assolutamente;
2. se in un determinante convergente gli elementi di una linea sono sostituiti da quantità tutte minori (in valore assoluto) rispetto ad un certo numero positivo, il determinante sarà ancora convergente.

Nel 1891 H. von Koch⁷ generalizzò le ipotesi di Poincaré includendo anche determinanti con elementi della diagonale diversi da 1. Secondo Von Koch un determinante infinito è convergente se sia il prodotto degli elementi della diagonale che la somma degli elementi che non appartengono alla diagonale sono assolutamente convergenti dimostrando inoltre che per la convergenza di determinanti di questo tipo, è indifferente la scelta dell'origine.

Tra gli autori che hanno studiato i determinanti infiniti citiamo inoltre Bóbr (*Eine Verallgemeinerung des von Koch'schen ...*, Math. Z. 10, 1921,1-11), Cohen (*A note on a system of equation with infinite many unknowns*, Bull. Amer. Math. Soc., 36, 1930, 563-

572), Magnis (*Infinite determinants associated with Hill's equation*, Pacific J. Math) Mennicken (*On the convergence of infinite Hill-type determinants*, Arch. Rational Mech. Annals, 30, 1968, 12-37). Più di recente ricordiamo i lavori di Edmonds (*Application of the theory of Hill's equation to the study of the stability of periodic classical orbits*, Math. Gen., 22, 1989, 673-676) e Denk (*Hill's equation system and infinite determinants*, Math. Nachr., 175, 1995, 47-60; *The determinantal method for Hill system*, Math. Mech., 76, 1996, 509-510).

3. L'equazione di Hill

L'equazione di Hill, come già detto, parte da un problema che si riferisce alla teoria della Luna. In breve consegue, dalle ipotesi che il grande astronomo americano fissò per costruire in maniera soddisfacente delle tavole relative al moto lunare, l'equazione:

$$3.1 \quad \frac{d^2 u}{dz^2} + \left(\theta_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos 2nz \right) u = 0.$$

dove $\theta_0, \theta_1, \dots$ sono costanti note e $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ converge in modo assoluto. La (3. 1) può essere riscritta nella forma

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + J(z)u = 0$$

dove $J(z)$ è una funzione pari di z con periodo π . Nel caso astronomico, quando z è reale, $J(z)$ può essere sviluppato nella forma

$$J(z) = \theta_0 + 2\theta_1 \cos 2z + 2\theta_2 \cos 4z + 2\theta_3 \cos 6z + \dots$$

È bene ricordare che la soluzione dell'equazione di Hill in queste particolari ipotesi non è periodica.

Ponendo $\theta_{-n} = \theta_n$ e assumendo $u = e^{\mu z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{2niz}$ come soluzione dell'equazione (3. 1), si trova

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\mu + 2ni)^2 b_n e^{(\mu+2ni)z} + \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \theta_n e^{2niz} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{(\mu+2ni)z} \right) = 0.$$

Moltiplicando la serie assolutamente convergente e ponendo uguale a zero i coefficienti e^{2iz} , si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & \dots & & \\
 & \frac{(-4+c)^2 - \theta_0}{16 - \theta_0} & - \frac{\theta_1}{16 - \theta_0} & - \frac{\theta_2}{16 - \theta_0} & - \frac{\theta_3}{16 - \theta_0} & - \frac{\theta_4}{16 - \theta_0} \\
 & - \frac{\theta_1}{4 - \theta_0} & \frac{(-2+c)^2 - \theta_0}{4 - \theta_0} & - \frac{\theta_1}{4 - \theta_0} & - \frac{\theta_2}{4 - \theta_0} & - \frac{\theta_3}{4 - \theta_0} \\
 \dots & \frac{\theta_2}{\theta_0} & \frac{\theta_1}{\theta_0} & - \frac{c^2 - \theta_0}{\theta_0} & \frac{\theta_1}{\theta_0} & \frac{\theta_2}{\theta_0} & \dots \\
 & - \frac{\theta_3}{4 - \theta_0} & - \frac{\theta_2}{4 - \theta_0} & - \frac{\theta_1}{4 - \theta_0} & \frac{(2+c)^2 - \theta_0}{4 - \theta_0} & - \frac{\theta_1}{4 - \theta_0} \\
 & - \frac{\theta_4}{16 - \theta_0} & - \frac{\theta_3}{16 - \theta_0} & - \frac{\theta_2}{16 - \theta_0} & - \frac{\theta_1}{16 - \theta_0} & \frac{(4+c)^2 - \theta_0}{16 - \theta_0} \\
 & & & \dots & &
 \end{array}$$

La soluzione c si trova risolvendo l'equazione

$$3.4 \quad \Delta(c) = 0$$

dove $\Delta(c)$ rappresenta il determinante simmetrico infinito. L'equazione (3.4) può essere vista come un'equazione in c con un infinito numero di radici con le seguenti proprietà:

- le radici compaiono in coppia, ovvero se c_0 è una soluzione, allora anche $-c_0$ lo è. Infatti se nell'equazione (3.4) al posto di c viene inserito $-c$, l'equazione rimane inalterata;
- se c_0 è una radice, le altre radici si trovano attraverso l'espressione

$$c = \pm c_0 + 2j \quad (j = -\infty, \dots, +\infty).$$

Queste radici sono le medesime dell'equazione $\cos \pi c = \cos \pi c_0$, pertanto risulta $\Delta(c) = \cos \pi c = \cos \pi c_0$;

- ogni radice c_0 soddisfa l'equazione¹⁰

$$3.5 \quad \sin^2 \frac{1}{2} \pi c_0 = \Delta(0) \sin^2 \frac{1}{2} \pi \sqrt{\theta_0}$$

dove $\Delta(0)$ è il determinante che si ottiene ponendo $c = 0$ in $\Delta(c)$ ed ha quindi la forma

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & \dots & & \\
 & 1 & -\frac{\theta_1}{16-\theta_0} & -\frac{\theta_2}{16-\theta_0} & -\frac{\theta_3}{16-\theta_0} & -\frac{\theta_4}{16-\theta_0} \\
 & -\frac{\theta_1}{4-\theta_0} & 1 & -\frac{\theta_1}{4-\theta_0} & -\frac{\theta_2}{4-\theta_0} & -\frac{\theta_3}{4-\theta_0} \\
 \dots & \frac{\theta_2}{\theta_0} & \frac{\theta_1}{\theta_0} & 1 & \frac{\theta_1}{\theta_0} & \frac{\theta_2}{\theta_0} & \dots \\
 & -\frac{\theta_3}{4-\theta_0} & -\frac{\theta_2}{4-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{4-\theta_0} & 1 & -\frac{\theta_1}{4-\theta_0} \\
 & -\frac{\theta_4}{16-\theta_0} & -\frac{\theta_3}{16-\theta_0} & -\frac{\theta_2}{16-\theta_0} & -\frac{\theta_1}{16-\theta_0} & 1 \\
 & & & \dots & &
 \end{array}$$

Lo stesso Hill ha determinato un'espressione approssimata per $\Delta(0)$

$$3.6 \quad \Delta(0) = 1 + \frac{1}{4} \pi \left(\theta_1^2 (1 - \theta_0)^{-1} \theta_0^{\frac{1}{2}} \right) \cot \frac{1}{2} \pi \sqrt{\theta_0}$$

trovando inoltre, nelle osservazioni sul moto lunare, i seguenti valori per θ_n :

$$\theta_0 = 1.1588439396; \theta_1 = -0.0570440187; \theta_2 = 0.000383238; \theta_3 = -0.0000091732;$$

e la radice corrispondente $c_0 = 1.0715832774$.

A questo punto abbiamo pensato di riprendere la teoria dei determinanti di Hill facendo qualche applicazione con serie di tipo abbastanza semplice, anche se, in sostanza, non molto dissimili da quelle che Hill adoperò a suo tempo e questo anche al fine di verificare l'affermazione di Hill secondo la quale bastava prendere un minore di ordine 3 per avere risultati numerici soddisfacenti. Dobbiamo precisare che per minori si intendono quei minori che hanno come elemento centrale l'origine e come diagonale principale la diagonale formata dagli elementi $A_{i,i}$ e pertanto tali determinanti sono tutti di ordine dispari. Negli esempi seguenti riportiamo talune valutazioni numeriche ottenute prendendo in considerazione delle matrici di ordine 3, 5, 7 e 9. Attraverso la (3. 5) abbiamo determinato le soluzioni c_0 , confrontando tale risultato con il valore $\sqrt{\theta_0}$. Riportiamo inoltre il valore del determinante $\Delta(0)$ ottenuto sia come quantità approssimata attraverso la (3. 6) che come valore esatto prendendo in considerazioni le matrici di ordine 3, 5, 7 e 9.

Come primo esempio consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0.1^{n+1}$. I valori trovati sono i seguenti:

Sulla convergenza del determinante di Hill

$\sqrt{\theta_0}$	0.3162278			
$\Delta(0)$ (4.6)	1.0005091			
	3x3	5x5	7x7	9x9
$\Delta(0)$	1.0005129	1.0005110	1.0005106	1.0005105
	-0.3163163	-0.3163159	-0.3163159	-0.3163158
c_0	0.3163163	0.3163159	0.3163159	0.3163158

Questo primo esempio mette in evidenza la rapida convergenza del determinante e in effetti è sufficiente prendere in esame una matrice di ordine 3 per avere risultati soddisfacenti.

Considerando invece la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0.5^{n+1}$ abbiamo ottenuto le seguenti valutazioni:

$\sqrt{\theta_0}$	0.7071068			
$\Delta(0)$ (4.6)	1.0688012			
	3x3	5x5	7x7	9x9
$\Delta(0)$	1.0727041	1.0756892	1.0757923	1.0757474
	-0.7569798	-0.7591945	-0.7592713	-0.7592379
c_0	0.7569798	0.7591945	0.7592713	0.7592379

In questo caso la convergenza del determinante è più lenta, il che, effettuando un paragone con l'esempio precedente, fa intuire come la velocità di convergenza del determinante sia legata alla velocità di convergenza della serie utilizzata. Stesso dicasi per la soluzione c_0 , infatti mentre nella prima serie presa in considerazione tale valore è molto prossimo $\sqrt{\theta_0}$, questo non avviene nel caso della serie $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0.5^{n+1}$.

Vediamo un altro esempio, ovvero ipotizziamo $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(5+n)!}$ da cui segue:

$\sqrt{\theta_0}$	0.0912871			
$\Delta(0)$ (4.6)	1.0001159			
	3x3	5x5	7x7	9x9
$\Delta(0)$	1.0001160	1.0001165	1.0001165	1.0001165
c_0	-0.0912924	-0.0912924	-0.0912924	-0.0912924
	0.0912924	0.0912924	0.0912924	0.0912924

Anche in questo caso si è scelta una serie che converge abbastanza rapidamente e, come già osservato in precedenza, si vede come il determinante converga molto velocemente.

Nell'ipotesi in cui $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2+n)^2}$, abbiamo ottenuto i valori seguenti:

$\sqrt{\theta_0}$	0.5000000			
$\Delta(0)$ (4.6)	1.0258567			
	3x3	5x5	7x7	9x9
$\Delta(0)$	1.0264986	1.0282918	1.0285896	1.0286650
c_0	-0.5084358	-0.5090068	-0.5091016	-0.5091256
	0.5084358	0.5090068	0.5091016	0.5091256

e dall'analisi dei valori trovati si conferma quanto detto in precedenza.

Come ultimo esempio abbiamo pensato di utilizzare una serie a segni alterni assolutamente convergente, ovvero abbiamo ipotizzato $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(4+n)^2}$. I valori trovati in questo caso, sono di seguito riportati:

$\sqrt{\theta_0}$	0.2500000			
$\Delta(0)$ (4.6)	1.0129442			
	3x3	5x5	7x7	9x9
$\Delta(0)$	1.0130451	1.0145991	1.0149688	1.0150899
c_0	-0.2517154	-0.2519191	-0.2519675	-0.2519834
	0.2517154	0.2519191	0.2519675	0.2519834

La serie scelta è una serie che converge non molto rapidamente e di conseguenza, anche in questo caso, la convergenza del determinante infinito è lenta, così come la precisione numerica della soluzione c_0 è limitata a due cifre decimali.

Abbiamo già detto che tutte le altre radici si possono determinare a partire da c_0 attraverso l'espressione $c = \pm c_0 + 2j$ ($j = -\infty, \dots, +\infty$).

Una volta determinata la quantità c_0 tale per cui il determinante $\Delta(c)$ si annulla, è possibile trovare i coefficienti b_i ($i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) dell'equazione (3. 3). Poiché si tratta di un sistema lineare omogeneo con il determinante della matrice associata nullo oltre alla soluzione banale $b_i = 0$ ($i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$), esistono infinite soluzioni come

ben noto dalla teoria dei sistemi lineari. Considerando il caso $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0.1^{n+1}$, viene

preso in esame il sistema di equazioni $(c + 2j)^2 b_j - \sum_{i=-1}^{+1} \theta_{j-i} b_i = 0$ la cui matrice associata è

$$\begin{vmatrix} \frac{(-2+c)^2 - \theta_0}{4 - \theta_0} & - \frac{\theta_1}{4 - \theta_0} & - \frac{\theta_2}{4 - \theta_0} \\ \frac{\theta_1}{\theta_0} & - \frac{c^2 - \theta_0}{\theta_0} & \frac{\theta_1}{\theta_0} \\ - \frac{\theta_2}{4 - \theta_0} & - \frac{\theta_1}{4 - \theta_0} & \frac{(2+c)^2 - \theta_0}{4 - \theta_0} \end{vmatrix}$$

Dalle tabelle riportate in precedenza abbiamo visto che il determinante $\Delta(0)$ si annulla per $c_0 = 0.316316$, quindi, utilizzando tale risultato e applicando il concetto di autovalore, si trovano le seguenti soluzioni:

$$b_{-1} = 0.003655725 \lambda; b_0 = 0.999992 \lambda; b_1 = 0.0018999 \lambda;$$

ovvero

$$b_{-1} = 0.003655754 b_0; b_1 = 0.0018999 b_0.$$

4. Conclusioni

In base alle applicazioni numeriche presentate possiamo affermare che il determinante infinito di Hill è un determinante convergente, ma la rapidità di convergenza del determinante è strettamente legata alla rapidità di convergenza della serie (assolutamente) convergente utilizzata. Ad esempio nel caso di una serie geometrica di ragione $\beta = 0.1$ che converge molto rapidamente, è sufficiente prendere in considerazione un minore di ordine 3 per avere risultati numerici soddisfacenti.

Per quanto riguarda il valore c_0 , possiamo affermare che la sua precisione numerica rispetto al valore $\sqrt{\theta_0}$ è, ovviamente, legata anch'essa alla rapidità di convergenza della serie scelta.

5. Cenni storici su George William Hill

G.W. Hill nacque nel 1838 a New York e trascorse la sua infanzia in una casa di campagna lontano dalla città, mostrando sin da piccolo attitudine per la matematica. Nel 1859 prese la laurea al Rutgers College (New Brunswick) dopodiché proseguì i suoi studi al Cambridge Mass. Nel 1861 fu nominato assistente presso il Nautical Almanac Office, dove rimarrà per trent'anni, ritirandosi poi dai suoi impegni ufficiali per trascorrere una vita tranquilla nella sua casa di campagna.

Runkle, il sovrintendente del Nautical Office, aveva fondato una rivista scientifica denominata *Mathematical Monthly* che offriva premi per le ricerche più originali. Hill fu il primo a vincere questo premio per un saggio sulla configurazione della Terra intitolato "*On the configuration of the Earth*".

Potremmo dividere l'attività scientifica di Hill in tre periodi: il primo fino al 1877, quando Newcomb divenne sovrintendente al Nautical Office Almanac; il secondo dal 1877 al 1892 e il terzo dopo il 1892.

Durante il primo periodo Hill realizzò un manuale di formule e tavole per la determinazione della posizione delle stelle; studiò poi l'orbita di Venere e il fenomeno del suo transito nel 1874. Verso la fine di questo periodo Hill produsse il suo lavoro più noto riguardante la teoria lunare.

Eulero, Clairaut e d'Alembert, attraverso approcci diversi, avevano studiato il moto dei pianeti trovando risultati poco precisi; Laplace, includendo altri effetti gravitazionali aveva migliorato la teoria; Hansen, utilizzando formule lagrangiane, aveva applicato un metodo rigoroso, finendo però con l'imbattersi in serie che convergevano troppo lentamente; Delaunay aveva ricominciato tutto daccapo, riuscendo a determinare la longitudine, la latitudine e la parallasse della Luna, attraverso serie infinite, ma il metodo utilizzato era poco pratico in quanto le serie convergevano troppo lentamente. Nel 1877 Hill nell'opera¹¹ "*On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motion of the Sun and Moon*", pubblicata a sue spese, presentò dei metodi completamente nuovi per lo studio del moto lunare. Il nuovo approccio di Hill al problema consisteva nel calcolo numerico di una particolare soluzione del problema dei tre corpi, soluzione che lui stesso definì "*Variation Orbit*". Hill ottenne dei coefficienti numerici riportando la "*Variation Orbit*" con ben 15 numeri decimali, ottenendo per l'epoca, il più preciso parametro del moto lunare, nonostante l'eccentricità, l'inclinazione e la parallasse non fossero noti in maniera esatta. Hill si chiese inoltre quale moto poteva emergere con l'introduzione di una eccentricità non specificata, una quantità talmente piccola che il suo quadrato poteva essere trascurato; il problema portò Hill all'introduzione dei determinanti infiniti. Hill non realizzò un lavoro completo sul moto lunare, sarà E.W. Brown¹² a completarlo dimostrando inoltre che il determinante trovato dal Hill rimaneva convergente anche con l'introduzione di eccentricità, inclinazione e parallasse.

Nel 1877 Newcomb prese servizio al Nautical Almanac Office. Il nuovo direttore aveva intenzione di fare un revisione dei moti di tutti i pianeti e costruire le relative tavole su basi uniformi. A Hill venne affidato il lavoro riguardante Giove e Saturno; egli si proponeva di "*formulare teorie su Giove e Saturno che fossero valide per trecento anni (...) teorie i cui errori in questo intervallo di tempo sarebbero risultati dalle inevitabili imperfezioni nei valori delle costanti delle orbite e delle masse utilizzate (...)*". In sostanza Hill doveva paragonare le osservazioni dal 1750 al 1888, dedurre le correzioni delle orbite

e produrre nuove tavole; dopo aver considerato tutti i metodi possibili, concluse che la maggior parte dei metodi di Hansen potevano andare bene per questo scopo. Pertanto Hill abbandonò i suoi studi sul moto lunare per completare ed applicare i metodi di Hansen a Giove e Saturno. Questo lavoro lo terrà impegnato per 15 anni, quando deciderà di dimettersi continuando, però, a lavorare a molti problemi connessi alla teoria delle perturbazioni e alcuni dei suoi lavori continuarono ad apparire regolarmente sull'*Astronomical Journal*.

Tra i numerosi premi assegnati ad Hill, ricordiamo la medaglia d'oro attribuitagli nel 1887 dalla Royal Astronomical Society, mentre tra le cariche che ha ricoperto vale la pena menzionare la presidenza dell'*American Mathematical Society* (1895-1896). Hill è stato inoltre per un breve periodo professore alla Columbia University.

Bibliografia: parte storica

- [1] Forsyth A.R., *Theory of differential equations*, Cambridge University Press, 1902 (vol.IV);
- [2] Muir T., *The theory of determinants in the Historical order of development*, Macmillian and co., London, 1920 (vol. III);
- [3] Muir T., *The theory of determinants in the Historical order of development*, Macmillian and co., London, 1923 (vol. IV);
- [4] Schmidt D., *The lunar theory of Hill and Brown*, *Celestial Mechanics*, 21, 1980, pp.163-169;
- [5] Steen L. A., *Highlights in the History of Spectral Theory*, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 80, No. 4., 1973, pp.359-381;
- [6] Wilson C., *19th-century Lunar Theory*, *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach*, Report No. 51/2004, "The History of Differential Equations, 1670–1950", pp. 2763-2765;

Bibliografia: parte analitica

- [7] Brown E.W., *An Introductory Treatise on the Lunar Theory*, Cambridge University Press, 1896 (ristampato da Dover nel 1960)
- [8] Denk R., *Hill's equation system and infinite determinants*, *Math. Nachr.*, 175, 1995, pp.47-60;
- [9] Hill G.W., *On the part of the motion of the Lunar perigee ...*, John Wilson, Cambridge, Mass, 1877; ristampato su *Acta Mathematica*, 8, 1886, pp.1-36 (Coll. Math Works, 1, pp.243-270);
- [10] Poincaré H., *Sur les déterminants d'ordre infini*, *Bull. Soc. Math. France*, 14, 1886, pp.77-90;
- [11] Roberts E., *Note on infinite determinants*, *The annals of mathematics*, vol. 10, No. 1/6, 1895-1896, pp.35-49;
- [12] Scott R.F., *The theory of determinants and their application*, Cambridge University Press, 1904;

- [13] von Koch H., *Sur les déterminants d'ordre infinis et les équations différentielles linéaires*, Acta Mathematica, 16, 1892, pp.217-295;
- [14] von Koch H., *Sur une application des déterminants infinis et les équations différentielles linéaires*, Acta Mathematica, 15, 1891, pp. 53-63;
- [15] Whittaker E.T., G.N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, New York, 1990;

¹ Per semplicità indicheremo con D_m (e quindi D_∞) sia il determinante che la relativa matrice.

² Si veda L. Eulero, *Vollständige Ableitung zur Algebra* (St. Petersburg, 1770); E. Bézout, *Théorie générale des équations algébrique* (Paris, 1779).

³ Si veda G. Cramer, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Geneva, 1750).

⁴ Si veda J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur* (Paris, 1822).

⁵ Cfr [9].

⁶ Cfr[10].

⁷ Cfr [13], [14].

⁸ Cfr [15].

⁹ È bene ricordare che il lavoro di Hill sul moto lunare fu portato a termine da Brown nel 1886. Cfr [7].

¹⁰ Notiamo come dalla (3. 5) si deduce che il valore c_0 è prossimo a $\sqrt{\theta_0}$.

¹¹ L'edizione originale fu pubblicata nel 1877 a Cambridge, USA, mentre nel 1886 il lavoro venne ristampato su Acta Mathematica.

¹² Cfr [7].