Società Italiana di Archeoastronomia

Atti del
VI Congresso di Archeoastronomia, Storia dell'Astronomia Antica, Astronomia culturale e Astronomia Storica

Università degli Studi del Molise
Dipartimento di Scienze Economiche, Gestionali e Sociali
Campobasso, 22 - 23 settembre 2006

A cura di
Elio Antonello

INDICE

L'EQUAZIONE DI HILL NELLA TEORIA DEL MOTO LUNARE

ENNIO BADOLATI e TERESA BOCCIA
Università degli Studi del Molise

Abstract. In this paper we expose the historical development of Hill's differential equation in lunar theory. Besides we analyse, in an historical context [environment] how rose the idea of an infinite determinant and the problem of its convergence.

Sunto. Viene esaminata nel contesto storico l'equazione differenziale che l'astronomo americano Gorge William Hill trovò nello studio della Teoria della Luna. Infine viene tracciata la storia del concetto di determinante infinito e della relativa convergenza, tematica che costituisce parte essenziale dell'equazione oggetto dell'analisi.

1. Introduzione

La teoria della Luna è una branca, sicuramente complessa ma certo di grande fascino, che si incontra nella meccanica celeste. Più precisamente, si tratta di un'applicazione del classico problema dei tre corpi, tuttavia con opportune semplificazioni che rendono la questione – in un certo senso – più abbordabile, pur tenendo sempre presente che l'argomento richiede sia sviluppi analitici che verifiche numeriche, risultando necessario costruire – una volta terminate le ricerche – delle tavole di grande accuratezza per il moto lunare.

Molte le teorie dedicate a questo tema e, tra queste, dobbiamo ricordare i lavori di De Pontécoulant, Eulero, Hansen, Clairaut, Laplace, Damoiseau, Mayer e, infine, quelli del matematico ed astronomo italiano Giovanni Plana[1]. Tuttavia la teoria più elegante e forse più completa è quella di Delaunay, la quale esprime il moto lunare attraverso delle serie. Tale soluzione, pregevole assai dal punto di vista analitico, ha però un grave difetto e cioè le serie che vengono fuori sono di convergenza molto lenta come testimoniato dalle parole di Poincaré[2] ("*Malheureusement les séries de Delaunay ne convergent qu'avec une désespérante lenteur*"). Possiamo pertanto intendere i motivi che spinsero l'astronomo americano George William Hill a riprendere *ex novo* la questione di trovare un metodo efficiente per la costruzione di tavole relative al moto della Luna. La sua indagine, oltre a partire da basi completamente nuove, portò anche ad una straordinaria innovazione nel campo della matematica e cioè i determinanti infiniti.

2. L'equazione differenziale relativa al moto del perigeo

E' noto che, nella Teoria della Luna, usualmente, la massa lunare viene stimata come trascurabile per cui il moto terrestre ed il moto solare si intendono come non perturbati dalla Luna. Fissando un riferimento cartesiano ortogonale con origine nella Terra ed avente l'asse delle ascisse coincidente con la direzione Terra-Sole, allora la forza agente sulla Luna può rappresentarsi alla seguente maniera (scegliendo l'unità di misura delle masse in modo che la costante gravitazionale risulti unitaria)

$$F = \frac{T+L}{r^2} + m'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x\,x'+y\,y'+z\,z'}{r'^3}\right) = F_1 + R \qquad \left(F_1 = \frac{T+L}{r^2}\right)$$

Ammettendo, con prassi ormai consolidata, che T, L e m' indichino sia la massa che la posizione della Terra, della Luna e del Sole (o del pianeta perturbatore), si hanno inoltre le distanze r = Terra-Luna, r' = Sole-Terra, Δ = Sole-Luna ed infine le coordinate della Luna (x, y, z) e del Sole (x', y', z') nel sistema precedentemente introdotto. Detto S l'angolo individuato dalla relazione

$$r\,r' \cos S = x\,x' + y\,y' + z\,z'$$

si ha che S è l'angolo individuato dalle direzioni Luna-Terra e Terra-Sole per cui, come è noto nella meccanica celeste, la funzione perturbatrice R può svilupparsi in serie di polinomi di Legendre. Infatti, con le notazioni precedentemente adoperate, si trova

$$R = m'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r\cos S}{r'^2}\right)$$

ed inoltre

$$\Delta^2 = r'^2\left(1 - 2\frac{r}{r'}\cos S + \frac{r^2}{r'^2}\right) = r'^2\left(1 - 2\,q\cos S + q^2\right) \qquad \left(\frac{r}{r'} = q\right)$$

per cui risulta

$$R = m'\,\frac{1}{r'}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2q\cos S + q^2}} - q\cos S\right)$$

e quindi

$$R = \frac{m'}{r'}\sum_{2}^{\infty}{}_{n}\; q^n\; P_n(\cos S)$$

dove P_n è il polinomio n-simo di Legendre, essendo

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\,\frac{d^n}{d\,x^n}\left(x^2-1\right)^n$$

Nel metodo di Hill, al riferimento cartesiano precedente, si associa un altro sistema, sempre con centro in T e con il medesimo asse delle quote, ma con l'asse delle ascisse orientato dalla Terra alla Luna, per cui i due assi formano un angolo pari ad S.

Inoltre lo stesso metodo considera prima un'orbita intermedia (detta orbita variazionale) che dipende solo dal rapporto $\frac{n'}{n}$, essendo n' il moto medio del Sole (che quindi viene immaginato come ruotante attorno alla Terra) ed n il moto medio lunare. Successivamente si fanno intervenire le correzioni dipendenti dagli altri parametri orbitali (eccentricità, inclinazione e grandi assi), e proprio nello studio di una variazione del genere, Hill trovò l'equazione differenziale

$$(2.1) \qquad \frac{d^2\,\delta N}{d\,t^2} + J(t)\,\delta N = 0$$

ove δN rappresentava lo spostamento lungo la normale relativa all'orbita intermedia della Luna mentre *J(t)* indicava una funzione pari e periodica di periodo π.

Introducendo una nuova variabile *x*, che è sostanzialmente un tempo modificato, e ponendo $\delta N = u(x)$ si trova l'equazione differenziale

$$(2.2) \qquad u'' + J(x)\,u = 0$$

con *J(x)* che ammette, per le proprietà enunciate, lo sviluppo in serie trigonometrica

$$(2.3) \qquad J(x) = \theta_0 + 2\sum_{1}^{\infty}{}_n\, \theta_n \cos 2nx$$

convenendo che la serie

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n\, \theta_n$$

risulti assolutamente convergente.

Volendo ora introdurre a grandi linee la teoria relativa all'equazione di Hill, dobbiamo ricordare che nell'esposizione originale dell'astronomo americano, anche se sostanzialmente corretta nel senso che i risultati conseguiti non erano affetti da errori, il procedimento - basato più sull'intuito che sul rigore - non soddisfaceva appieno i canoni della precisione matematica; pertanto abbiamo stimato di introdurre brevemente l'esposizione che oggi è universalmente accettata per poi riesaminare nel paragrafo successivo il lavoro originale di Hill.

Tanto premesso, occorre ricordare che per la (2.2) sussiste il teorema di Floquet[3] dal quale discende che l'integrale generale dell'equazione di Hill (così come dell'equazione di Mathieu; vedere ad es. Wittaker - Watson, pag. 413) si può scrivere[4] come

$$(2.4) \qquad u = E_1\, e^{\mu x}\, \varphi(x) + E_2\, e^{-\mu x}\, \varphi(-x)$$

dove E_1 ed E_2 sono costanti arbitrarie, μ una quantità (non necessariamente reale) da valutare e $\varphi(x)$ una funzione - sempre da determinare - periodica con lo stesso periodo di *J(x)*, vale a dire π. E' bene, tuttavia, osservare che le soluzioni di un'equazione differenziale con coefficienti periodici non sono necessariamente periodiche e risulta, quindi, quanto mai opportuna l'osservazione (riportata in Wittaker - Watson, pag. 407): "*The solution of Hill's equation is, in fact, not periodic*".

Riprendendo la relazione (2.3), con l'aiuto delle formule di Eulero e con la posizione $\theta_{-n} = \theta_n$, troviamo

$$J(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, \theta_n\, e^{2nix} \qquad \left(i = \sqrt{-1}\right)$$

per cui, ricordando che la $\varphi(x)$ deve risultare periodica di periodo π, si può porre

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, b_n\, e^{2nix}$$

e di conseguenza il primo termine della (2.4) risulta

$$u = e^{\mu x} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\, b_n\, e^{2nix}$$

in modo che, sostituendo nell'equazione di Hill, si ottiene il sistema infinito di equazioni ricorrenti

$$(2.5) \qquad (\mu + 2ni)^2\, b_n + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\, \theta_m\, b_{n-m} = 0$$

Come già detto, la nostra sintesi si riferisce ad una teoria successiva e più rigorosa rispetto alla formulazione originale di Hill e per questo motivo dovremo limitarci ai risultati fondamentali. Dividendo quindi la relazione (2.4) per il termine $\theta_0 - 4n^2$, a motivo di ottenere la convergenza del procedimento, si consegue una condizione per gli incogniti coefficienti b_k (e costante μ), che coincide con l'annullarsi di un determinante infinito di termini

$$A_{n,m} = \frac{(i\mu - 2m)^2 - \theta_0}{4m^2 - \theta_0} \qquad A_{n,n} = \frac{-\theta_{n-}}{4m^2 - \theta_0} \qquad (n \neq m)$$

e si vede che, detto $\Delta(i\mu)$ tale determinante, deve aversi

$$\Delta(i\mu) = 0$$

Tuttavia, occorre notare che $\Delta(i\mu)$ non converge assolutamente e quindi, per conseguire questo tipo di convergenza, conviene dividere le equazioni (2.5) per

$$\theta_0 - (i\mu - 2n)^2$$

al posto di $\theta_0 - 4n^2$. Il nuovo determinante ha per elementi

$$B_{m,m} = 1 \qquad B_{m,n} = \frac{-\theta_{m-n}}{(2m - i\mu)^2 - \theta_0} \qquad (m \neq n)$$

e di qui, con alcune trasformazioni e sviluppi che omettiamo per ragioni di sinteticità, si ottiene l'equazione

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\, i\mu\right) = \Delta(0)\, \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0}\right)$$

dove occorre notare che, nel caso astronomico, ordinariamente μ è un immaginario puro.

3. Il metodo originale

Nello sviluppare la sua indagine (1877), Hill non era naturalmente a conoscenza della teoria di Floquet, ma tuttavia il suo intuito lo portò a delle conclusioni che, in sostanza, anticipavano i risultati conseguiti dal grande matematico francese. Per dare un'idea del metodo seguito da Hill, ricordiamo innanzitutto che l'equazione fondamentale del suo scritto (e cioè la (2.1)) risultava essere

$$D^2\, u = J(\zeta)\, u \tag{3.1}$$

dove

$$J(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_i\; \theta_i \zeta^{2i} \qquad\qquad (\theta_{-i} = \theta_i)$$

essendo[5]

$$\zeta = \exp i\,\tau \qquad\qquad (\,\tau = (n - n')(t - t_0)\,)$$

e

$$D\,u = -i\,\frac{d}{d\tau}\,u$$

E' chiaro che τ è un tempo modificato. Dalle valutazioni numeriche effettuate, Hill realizza che, *se* θ_1, θ_2 ... sono più piccoli di θ_0 (ovvero, riportando le sue parole "*are, to a considerable degree, smaller than* θ_0"), allora la (3.1) può essere confrontata con

$$u'' = \theta_0\, u \tag{3.2}$$

che è riconducibile ad un'equazione di Eulero nella variabile ζ, la quale si integra immediatamente ottenendo

$$u(\zeta) = E_1\, \zeta^{c} + E_2\, \zeta^{-c} \qquad \left(c = \sqrt{\vartheta_0}\;,\; E_1\, e\, E_2 \text{ costanti arbitrarie}\right) \tag{3.3}$$

Anche qui Hill dà per scontato che, se due equazioni differenziali come le (3.1) e (3.2) hanno i coefficienti soggetti ad una limitazione del tipo

$$\left| J(\zeta) - \theta_0 \right| < \eta$$

con η costante assegnata, i rispettivi integrali verificano una simile relazione, cosa non inverosimile ma che pure richiede qualche ulteriore precisazione[6]. Tanto premesso, ritorniamo alla memoria originale di Hill dove la relazione (3.3) viene adoperata per avanzare l'ipotesi che, con buona ragionevolezza, l'integrale generale della (3.1) dovrebbe essere

$$u = E_1\, \zeta^{c}\, f_1(\zeta) + E_2\, \zeta^{-c}\, f_2(\zeta)$$

che in sostanza è un'anticipazione, sia pur intuitiva, della teoria di Floquet. A questo punto Hill considera un integrale particolare del tipo

$$u = \zeta^{c} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_i\; \zeta^{2i}\, b_i$$

osservando, tuttavia, che c dipende da θ_0, θ_1,..., θ_n e che quindi non può coincidere con $\bar{c} = \sqrt{\theta_0}$. Con un procedimento sostanzialmente analogo a quello del paragrafo precedente, Hill trova la relazione ricorrente

$$(3.4) \qquad (c+2j)^2\, b_j - \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_i\, \theta_{j-i}\, b_i = 0 \qquad (j \in Z)$$

E' chiaro che c, la radice richiesta, verifica la relazione $c = i\ \mu$, essendo μ la radice introdotta nel paragrafo 2; risulta, quindi, che c indica una quantità reale, almeno limitandoci alla maggior parte delle applicazioni.

Di seguito vengono elencate alcune proprietà delle radici c che verificano l'equazione

$$\Delta(c) = 0$$

dove Δ è il determinante infinito che discende dalle condizioni di consistenza per le (3.4).

1. Le radici dell'equazione $\Delta(c) = 0$ sono infinite; si trova subito che se c_0 è una radice, lo è anche $-c_0$ in quanto il determinante infinito risulta invariato. Inoltre, sempre nell'ipotesi che c_0 indichi una radice dell'equazione, sono radici anche i termini della successione

$$c_j = \pm\, c_0 + 2\, j \qquad (j \in Z)$$

   e questo perché, sostituendo (ad esempio) c con $c+2$ e spostando il divisore di un posto, si riottene, sostanzialmente, il determinante $\Delta(c)$. Il ragionamento si può facilmente generalizzare.
2. Si nota subito che i numeri $c_j = \pm\, c_0 + 2\, j$ sono anche radici dell'equazione

$$\cos \pi\, c = \cos \pi\, c_0$$

   per cui si può porre

$$(3.5) \qquad \Delta(c) = k\,(\cos \pi\, c - \cos \pi\, c_0)$$

Si può dimostrare (Brown, pag. 218) che k non dipende né da c né dai termini θ_i ($i \in Z$, $i \neq 0$) per cui, ponendo le predette costanti $\theta_i = 0$, il determinante di Hill si riduce ad un determinante diagonale, vale a dire formato dai termini

$$(3.6) \qquad \beta_{i,j} = \frac{(c-2\,j)^2 - \theta_o}{(2\,j)^2 - \theta_o}$$

Indicando con $\Delta_0(c)$ tale determinante, si trova, per $j = 0$, la radice $c_0 = \sqrt{\theta_0}$, per cui dalla (3.5) discende la relazione

$$(3.7) \qquad \Delta_0(c) = k\left(\cos \pi\, c - \cos \pi \sqrt{\theta_0}\right)$$

Come già detto, si può dimostrare che k non dipende da c per cui, ponendo $c = 0$ nella (3.7) e tenendo conto che per tale valore di c le (3.6) divengono

$$\beta_{j,j} = 1$$

risulta, in definitiva, $\Delta_0(0) = 1$ ovvero, sostituendo tale valore nella (3.7),

$$1 = k\left(1 - \cos \pi \sqrt{\theta_0}\right)$$

Dalla (3.5) discende quindi

$$\Delta(c) = \frac{\cos \pi c - \cos \pi c_0}{1 - \cos \pi \sqrt{\theta_0}}$$

e, ponendo ancora $c = 0$,

$$(3.8) \qquad \Delta(0) = \frac{1 - \cos \pi c_0}{1 - \cos \pi \sqrt{\theta_0}}$$

da cui

$$(3.9) \qquad \sin^2 \frac{\pi}{2} c = \Delta(0) \sin^2 \frac{\pi}{2} \sqrt{\theta_0}$$

Il problema di calcolare c (o meglio il termine c_0 della successione $\pm c_0 + 2j$, con $c_0 > 0$) viene così ricondotto alla valutazione di $\Delta(0)$.

In realtà sembrerebbe preferibile la formula (3.8) alla (3.9), ma occorre tener presente che sussiste una formula molto generale, vale a dire

$$\Delta(i\mu) = \Delta(0) - \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi i \mu\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi \sqrt{\theta_0}\right)}$$

e quindi, per analogia, si può comprendere la preferenza accordata alla (3.9).

Per quanto riguarda il calcolo approssimato di c, lo stesso Hill nota che, nella teoria della Luna, risulta in generale

$$\Delta(0) \cong 1$$

per cui segue l'approssimazione peraltro già anticipata a proposito dell'equazione (3.2).

$$c_0 \cong \sqrt{\theta_0}$$

Un altro metodo di valutazione numerica, sempre dovuto a Hill, consiste nel porre

$$tg\,\alpha = \frac{\pi}{8} \frac{\theta_1^2}{(\theta_0 - 1)\sqrt{\theta_0}}$$

per poi calcolare c dall'equazione

$$\sin \frac{\pi}{2} c = \frac{1}{\cos \alpha} \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\theta_0} - \alpha\right)$$

a meno di un modesto errore. Infine, un altro procedimento, dovuto a Brown (Brown, pag. 223), risiede nella formula

$$\Delta(0) \cong 1 + \frac{\pi}{4} \frac{\theta_1^2}{(1 - \theta_0)\sqrt{\theta_0}} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} \sqrt{\theta_0}$$

da usare nella (3.8) o nella (3.9). Anche in tal caso la precisione è ragguardevole.

Come curiosità, aggiungiamo che, nella memoria originale, Hill ottiene un'altra formula per approssimare $\Delta(0)$, ma estremamente lunga, vale a dire una pagina intera (Hill, pag. 32).

4. Determinanti infiniti

Nella memoria di Hill (pag. 26) si può leggere la seguente frase[7], che riportiamo in traduzione: "*La questione della convergenza, per così dire, di un determinante formato da infiniti elementi non è mai stata esaminata, per quanto è a mia conoscenza*". Ciò non corrisponde esattamente al vero perché già nel 1812 Wronski aveva valutato l'esistenza di determinanti infiniti. Altre considerazioni, poi, erano state sviluppate da Fürstenau (nel 1860 e nel 1867), da Kötteritzsch (nel 1870) e da Zeipel (nel 1871).

Nel 1877 apparve la memoria di Hill e quindi alcuni risultati da parte di Pincherle (1883) e di Appel (1884), tuttavia senza alcun collegamento. Come già detto, la memoria di Hill apre la questione ma non la risolve, nel senso che la convergenza di un determinante infinito è solo lumeggiata, mentre viene trascurata la proprietà di assoluta convergenza.

Sul tema è il caso di riprendere un commento del Muir[8] (Muir, III, pag. 428) e cioè: "*La memoria di Hill è decisamente diversa dalle precedenti nel senso che in essa si ha l'impressione che l'argomento passi da una leggera curiosità ad una seria indagine*[9]". Per inciso notiamo, e non senza profonda meraviglia, che il monumentale trattato del Muir non è citato nel famoso testo di Whittaker - Watson.

Tornando alla questione relativa alla convergenza di un determinante infinito, occorre dire che l'argomento trova sistemazione in una memoria di Poincaré ("*Sur les déterminants d'ordre infini*", Bull. Soc. Math. de France, XIV, 1886). Dopo aver ricordato il lavoro di Appel ("*Sur une méthode élémentaire ...*", Bull. Soc. Math. de France, XIII, 1884) e dopo aver notato che "... *cette hardiesse* (di Hill, n. d. r.) *ait été justifiée par le succès ...*", Poincaré finisce con l'affermare che bisogna "... *démontrer analytiquement la légitimité de sa méthode*". Tanto premesso, il grande matematico francese, con delle limitazioni sui minori principali, trova il risultato seguente: "*Un determinante infinito converge se convergono assolutamente il prodotto infinito degli elementi diagonali e la serie doppia formata dagli elementi non diagonali*".

A questo riguardo, vediamo come Brown sintetizza tale proprietà: Detto $\beta_{i,j}$ un elemento non diagonale del determinante $\Delta(c)$ e detto inoltre $1+\beta_{i,-i}$ un elemento diagonale (essendo $1+\beta_{0,0}$ l'elemento centrale), consideriamo il prodotto infinito

$$\Pi_i = \left(\left|1+\beta_{i,-i}\right| + \sum\nolimits_j \left|\beta_{i,j}\right|\right) \tag{4.1}$$

dove i, j variano tra $-n$ ed n, con n numero dispari, mentre nella sommatoria viene esclusa la possibilità che risulti $j = -i$. E' il caso di ricordare, a questo punto, che il termine $1+\beta_{0,0}$ viene chiamato elemento centrale e che, per la convergenza di un determinante infinito, occorre che tutti i minori centrali, ovvero i minori (naturalmente di ordine dispari) che hanno come elemento centrale $1+\beta_{0,0}$, formino una successione convergente.

Tanto premesso, il prodotto (4.1), che indicheremo con P_n, contiene tutti i termini dello sviluppo di Δ_n ed altri termini in più. Pertanto, al divergere di n, segue

$$\lim \Delta_n < \lim \Pi_n$$

Sussistendo la disuguaglianza

$$P_n \le \Pi_i \left(1 + \sum\nolimits_j \left|\beta_{i,j}\right|\right) \tag{4.2}$$

dove il valore $j = -i$ non è più escluso, risulterà

$$\lim \Delta_n < \lim \Pi_i \left(1 + \sum_j |\beta_{i,j}|\right)$$

Dalla teoria dei prodotti infiniti segue che il prodotto infinito che compare nella (4.2) converge se converge la serie

$$\sum_j |\beta_{i,j}|$$

Tale risultato sintetizza il teorema di Poincaré. Con qualche considerazione supplementare si può far vedere che $\Delta(n)$ converge e ciò esaurisce la nostra discussione.

Di seguito Helge von Koch tornò sull'argomento relativo ai determinanti infiniti ("*Sur le determinants infinsi* ...", Acta Math., XVI, 1892), giungendo ad una sistemazione definitiva della questione. Trovava conferma, così, la bella frase di Poincaré: "*Je crois que ... la belle méthode de M. Hill ne peut plus donner prise à aucune objection*" (loc. cit., pag. 90).

5. Talune valutazioni di Poincaré sul lavoro di Hill

Nel primo volume dell'opera "*The Collected mathematical Works of G. W. Hill*", Poincaré ha scritto una dotta introduzione che è anche una testimonianza dell'ammirazione che egli nutriva verso l'astronomo americano. Come spesso succede nelle opere dei matematici francesi, lo stile è limpido e straordinariamente elegante. Per tale motivo riportiamo, con libera traduzione, una valutazione particolarmente espressiva riguardante l'equazione differenziale che abbiamo esaminato in questo lavoro: "*La soluzione adottata da Hill è tanto originale quanto ardita. La nostra equazione differenziale deve essere risolta attraverso una serie. Sostituendo in essa una serie S a coefficienti indeterminati, si otterrà una serie Σ che dovrà essere identicamente nulla. Uguagliando a zero i differenti coefficienti di tale serie Σ, si otterranno delle equazioni lineari le cui incognite saranno i coefficienti indeterminati di S. Tali equazioni e le relative incognite erano però in numero infinito. Era possibile uguagliare a zero il determinante di queste equazioni?Hill ha osato farlo ed è questa una grande audacia: fino ad allora non erano state mai considerate delle equazioni lineari in numero infinito né erano stati mai studiati i determinanti di ordine infinito; non si sapeva nemmeno definirli e non era certo che si potesse dare un senso preciso a tale nozione. Per completezza,tuttavia, è doveroso aggiungere che Kotteritzsch aveva affrontato la questione nei 'Poggendorf's Annales' ma la sua memoria non era in generale nota nel mondo scientifico e comunque non a Hill. D'altra parte il suo metodo non aveva nulla in comune con quello del geometra americano* ".

6. Hill e Adams

La teoria di Hill ebbe ottima accoglienza da parte degli astronomi del tempo e particolarmente da Adams il quale fece al riguardo alcune notevoli considerazioni, ma su questo argomento ci proponiamo di soffermarci in una pubblicazione successiva.

7. Conclusioni

Gli eventi esaminati mostrano non una ma più conclusioni tra le quali stimiamo di dover mettere in luce le seguenti: la prima è che la Meccanica celeste si rivela come un formidabile motore per la Matematica, dando ad essa spunti ed idee per il suo avanzamento. Di seguito è bene aggiungere che, sempre nella Meccanica celeste, la più elaborata teoria analitica deve, di necessità, accompagnarsi a delle efficienti valutazioni numeriche, delle quali sono note le difficoltà. Infine ogni soluzione del problema lunare non idonea alla costruzione di tavole rimane un risultato certamente interessante, ma non risolutivo. Pertanto non c'è da concludere che la teoria della luna costituisce un problema non facile, ma certamente di grande fascino.

BIBLIOGRAFIA

Adams J. C., "*On the Motion of the Moon's Node in the case when the Orbits of the Sun and Moon are supposed to have no Eccentricities, and when their mutual Inclination is supposed to be indefinitely small*" in *Monthly Notices Royal Astronomical Society*, vol. 38, Annata 66, 1906, pag. 43-49

Brown E. W., *Lunar theory*, 1896, Ristampa Dover, New York, 1960

Forsyth A. R., *Differential equations*, 3 vol, Ristampa Dover, New York, 1959, Vol II, Parte III

Hill G. W., "*On that part of the Motion of Lunar Perigee which is a function of the mean motions of the Sun and Moon*" in *Acta Mathematica*, vol 8, 1886, pag. 1-36.

Hill G. W., *The Collected mathematical Works of G. W. Hill*, Carnegie Institution of Washington, Washington, 1905-1907

Ince E. L., "*On a General Solution of Hill's Equation*" in *Monthly Notices Royal Astronomical Society*, vol. 75, 1915, pag. 436-448.

Kovalevsky J., *Introduction à la mécanique céleste*, Colin, Paris, 1963

Lachlan Mc N. W., "*Mathieu functions*", 1947 - Ristampa Dover, New York, 1964

Linton C. M., *From Eudoxus to Einstein*, Univ. Press, Cambridge, 2004

Magnus W., Winkler S., *Hill's equation*, Ristampa Dover, New York, 1979

Muir T., *The theory of determinants in the historical order of development* – 2 Vol., Ristampa Dover, New York, 1960, Vol. II

Plummer H. C., *Dynamical Astronomy*, Ristampa Dover, New York, 1960

Sansone G., *Equazioni differenziali nel campo reale* – Parte I, Zanichelli, Bologna, II ed., 1965

Smart W. M., *Celestial mechanics*, Longmans, London, 1953

Taton R., Wilson C. (EDS), *Planetary astronomy from the renaissance to the rise of astrophysics* (parte B), Univ. Press, Cambridge, 1995

Tisserand F., *Mécanique céleste*, Gautier-Villars, Paris, 1894, Tomo III

Whittaker E. T., Watson G. N., *Modern Analysis*, Univ. Press, Cambridge, Ristampa 1965, IV ed.

NOTE

[1] In effetti, il Plana cominciò a lavorare sul tema assieme all'astronomo Francesco Carlini, ma poi preferì continuare da solo e pubblicò sull'argomento tre poderosi volumi, in francese, a Parigi nel 1832. Ricordiamo ancora che nel 1820 l'Accademia delle Scienze di Parigi, su richiesta di Laplace, aveva bandito un premio sul moto lunare e ne risultarono vincitori Plana e Carlini, anche se l'Accademia ritenne di dividere il premio fra loro e Damoiseau.

[2] Cfr. "*The Collected Mathematical Work of G. W. Hills*" vol. I – Introduzione (pag.XI)

[3] Achille Marie Gaston Floquet (1847-1920), distinto cultore di matematica ed astronomia, fu professore nell'Università di Nancy. Tra il 1879 ed il 1884 scrisse alcune memorie sulle equazioni differenziali a coefficienti periodici, memorie da stimare come fondamentali sull'argomento. Una sintesi di questi risultati costituisce l'omonimo teorema, per il quale rinviamo a Magnus – Winkler (cap. I) o a Wittaker – Watson (pag. 412).

[4] E' problema costante, nella meccanica celeste, la confusione tra i simboli che indicano l'eccentricità e la costante di Nepero, così come l'equivoco può sussistere anche per indicare l'inclinazione e l'unità immaginaria. In questa sede *e* indicherà la costante di Nepero ed *i* l'unità immaginaria.

[5] Ricordiamo che *n* ed *n'* indicano le velocità medie della Luna e del Sole (visto come un corpo che ruota attorno alla Terra); t_0 invece è una costante nota.

[6] Si veda ad es. Tricomi, Equazioni differenziali, Einaudi, Torino III ed., 1961, cap. II.

[7] "*The question of the convergence, so to speak, of a determinant consisting of an infinite number of constituents has nowhere, so far as I am aware, been discussed*"

[8] Come curiosità, ricordiamo che Muir chiama i determinanti infiniti "*multilineants*".

[9] "*Hill's paper ... seems to pass from matters of languid though legitimate curiosity to one of serious importance.*"