

Atti del XVI Convegno SIA

Società Italiana di Archeoastronomia

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
POLITECNICO DI MILANO
3-4 NOVEMBRE 2016

*Quis dubitet hominem
coniungere caelo?*

a cura di
Elio Antonello

INDICE

Presentazione	p. 1
Elio Antonello, <i>Astronomia, paleoclimatologia ed evoluzione umana</i>	3
Simone Bartolini, Federico Di Gesualdo, <i>Solar and cosmological symbolism and astronomical orientations of Romanesque churches in Tuscany</i>	31
Massimo Calabresi, Paola Refice, <i>Lettura astronomica del cielo dipinto nel sogno di Costantino di Piero della Francesca</i>	47
Maurizio Chirri, Michele Ceddia, Isabella Ercoles, Giorgio Manzi, <i>Differenze dei gradi iniziatici e delle corrispondenti influenze planetarie, nei mitrei di Santa Prisca in Roma e del Felicissimo in Ostia</i>	57
Mario Codebò, Athanasios Furlis, <i>Sirius was already white</i>	69
Paolo Colona, <i>The astronomical origin of numbers' symbolism</i>	79
Marta Conventi, Henry De Santis, <i>Misurare la terra secondo il cielo: il caso di Albingaunum</i>	97
Annamaria Dallaporta, Lucio Marcato, <i>A proposito della cometa di Akbar</i>	107
Giangiacomo Gandolfi, <i>Gli emisferi celesti della Sagrestia Vecchia a San Lorenzo e della Cappella dei Pazzi a Santa Croce: una rivalutazione astrologica. Parte I</i>	121

Nicoletta Lanciano, <i>Lettura critica dei metodi di Eratostene e Posidonio per stimare il meridiano terrestre, nell'opera di Cleomede</i>	149
Silvia Motta, Adriano Gaspani, <i>An archaeoastronomical investigation on the Templar churches built in Piedmont, in the North West of Italy</i>	165
Andrea Orlando, Carlo Veca, <i>Gli orientamenti delle tombe a pozzetto della necropoli protostorica di Thapsos (Siracusa): analisi preliminare</i>	177
Andrea Orlando, Orazio Palio e Maria Turco <i>Analisi archeoastronomica della spirale megalitica di Balze Soprane (Bronte, CT) nell'area nord-occidentale dell'Etna</i>	191
Guido Rosada, <i>Ut ad orientem spectet</i>	205
Alberto Scuderi, Vito Francesco Polcaro, <i>New evidences of solstice alignments of prehistoric sites in Western Sicily</i>	229
Eva Spinazzè, <i>Baptisteries and baptismal fonts: interpretation of the orientation of Early Christian and medieval baptisteries in Friuli (North-East of Italy). The case of Aquileia</i>	239
Angela Maria Zavaglia, <i>Il complesso rupestre della "Madonna della Stella" di Gravina in Puglia. Ipotesi sui riferimenti archeoastronomici nei rituali dei culti precristiani</i>	267

Lettura critica dei metodi di Eratostene e Posidonio per stimare il meridiano terrestre, nell'opera di Cleomede

Nicoletta Lanciano

Univ. di Roma "La Sapienza", nicoletta.lanciano@uniroma1.it

Abstract. We got the complete text of Cleomedes *De motu Circulari Corporum Caelestium* containing two methods for measuring the Earth meridian using an astronomical and a geometrical approach, one by Erathostenes and the other by Posidonius. Probably, Cleomedes is the more ancient author who explains in detail the Erathostenes method based on shadows at different latitudes on Earth. Instead, the method by Posidonius utilizes the observation of some stars. I analyse some problems about the ancient measurements, the methods used and the values found, that are not always in accordance with the historical vulgate.

1. Introduzione

L'idea di lavorare su questo testo poco citato di Cleomede, nasce dal ritrovamento fortunoso di una versione dello stesso, del 1606, da parte di un amico spagnolo, professore di matematica. Il libro si trovava nella Biblioteca che la sua famiglia aveva acquisito insieme ad una intera Certosa. Si tratta della Certosa di Aula Dei del XVI secolo, a Saragozza in Aragona, acquistata da un antenato, a sua volta professore di matematica all'Università, nel XIX secolo. Questo testo, non tanto considerato, è invece importante perché è l'unico che riporta integralmente i metodi di Eratostene e di Posidonio per stimare la grandezza della Terra.

Cleomede non è un astronomo ma è un divulgatore e forse un didatta, una persona che si occupa di insegnamento: infatti è molto attento a far capire bene quello che dice e questo lo porta a cercare di essere molto chiaro. Non si sa quasi niente di lui: è nato forse a Lysimachia, cioè vicino Bisanzio, certamente ha vissuto dopo Eratostene (276/272- 196/192 a.C.) e Posidonio (135- 50 a.C.), che come lui segue la filosofia stoica, perché ne descrive i metodi per la misura della grandezza della Terra. Forse ha vissuto prima di Tolomeo (100-175 d.C.): allude al fenomeno della rifrazione, calcolato e spiegato da Tolomeo, che però non cita. Eratostene, peraltro, è nato a Cirene sulla costa dell'attuale Libia, ma poi ha avuto l'opportunità di studiare ad Atene, di lavorare ad Alessandria d'Egitto e di

essere il terzo Direttore della grande Biblioteca. Posidonio, che è nato ad Apamea, ha viaggiato anche in Spagna e poi ha lavorato nell'isola di Rodi. Questo è molto interessante per evidenziare come il Mediterraneo sia stato tanto percorso nei quasi 500 anni di cui ci occupiamo, come ci fosse allora una grande circolazione di idee, di informazioni, incontri di persone e scambi di tecnologie in questa parte del mondo.

Il lavoro di Cleomede è riscoperto nell'XI secolo da Michael Psellus (1018-1078, Costantinopoli) e da Giovanni Pediasimus (1282-1326). È poi citato da Montucla nella sua storia della matematica del 1758, che lo colloca dopo Posidonio ma prima dell'era cristiana, perché fa riferimento agli dei classici. Marie, nel 1883, lo colloca intorno al 80 d.C. e Beaujeu, nel 1966, nel II sec d.C. Neugebauer (1975) individua invece la fine del IV sec d.C. per i suoi lavori a causa delle posizioni che cita per le stelle Antares e Aldebaran.

Di Cleomede abbiamo un'opera in due volumi scritta in greco *Κυκλική θεωρία μετεώρων*: la prima edizione stampata in greco è del 1539 ed è citata da Todd nel 1992. Ne abbiamo inoltre 5 versioni della traduzione in latino: per la prima volta è stata fatta da Giorgio Valla a Venezia nel 1488 con il titolo *Doctrina circularis de sublimibus*, e in seguito da H. Ziegler (Leipzig) nel 1891 con il titolo oggi più conosciuto *De motu Circulari Corporum Caelestium*.

Nel 1606 lo scozzese Robert Balfour, pubblica a Burdeos (Bordeaux) un'edizione in latino e greco, che è quella che ho potuto vedere per prima presso il mio amico spagnolo. È su questo testo che è basata la recente traduzione in spagnolo di Roser Cot con la revisione di Javier Bergasa e Francisco Martín Casalderrey, che non è ancora pubblicata, con il titolo *Dos libros sobre la contemplación de las órbitas celestes*. È in francese la traduzione di R. Goulet del 1980, *Cléomède: Théorie élémentaire*, Parigi, con note e figure (Cléomède [1980]). Una è in tedesco, di Czwalina, *Die Kreisbewegung der Gestirne* (Ostwalds Klassiker N° 220), del 1927, una in inglese di C. Bowen and R.B. Todd, *Cleomedes' Lectures on Astronomy: A Translation of The Heavens*, del 2004. In rete si trova un'ulteriore traduzione in spagnolo ma del tutto inaffidabile.

Le citazioni in italiano riportate (tra virgolette) in questo lavoro sono frutto della traduzione di Giorgia Labellarte e Nicoletta Lanciano, basata sulle traduzioni spagnola e francese con le rispettive note e le tavole illustrative, realizzate consultando la versione greca e latina.

2. Il *De Motu Circulari Corporum Caelestium*

Cleomede parte dai fenomeni osservati degli astri che possiamo vedere dalla Terra: le stelle appaiono tutte della stessa dimensione e sembrano avere lo stesso aspetto da ogni parte di questa. Cleomede ne deduce che se dalla Terra possiamo vedere tutti gli astri come puntini vuol dire che sono ad una grande distanza e se la Terra taglia sempre lo zodiaco in due parti uguali, cioè vi sono sempre 6 costellazioni zodiacali sopra l'orizzonte e 6 sotto di esso, vuol dire che la Terra è molto piccola rispetto alla grande distanza che c'è tra la Terra e gli astri ed è sferica e non, ad esempio, con la forma di una ciotola, come affermavano alcuni, perché in tal caso il bordo avrebbe nascosto parti di cielo: "Nessuno di questi fenomeni si produrrebbe se le linee rette tracciate da ciascuna delle parti della Terra in direzione di ciascuna parte del cielo non fossero uguali tra loro". Inoltre osservando le stelle dello zodiaco possiamo verificare che l'orizzonte divide il cielo in due parti uguali. Infatti "esattamente sei costellazioni appaiono sopra la Terra, senza che la profondità della stessa ne nasconda neanche la minima frazione di grado. Constatiamo, in effetti, che ci sono esattamente centottanta gradi sopra la Terra, come ci permettono di vedere gli equinozi, nei quali la notte non supera la durata del giorno di un minimo istante. E questo non accadrebbe se la profondità della Terra incontrasse una parte dell'equatore e se gli ottantamila stadi dello spessore della Terra avessero rilevanza rispetto ad esso". In particolare Cleomede accenna ad una misura, 80.000 stadi che sono lo spessore, quindi il diametro, della Terra, da cui si può dedurre che Cleomede considera circa $2r = 80.000$ stadi.

3. Della grandezza del Sole

Cleomede si distacca dalla visione degli stoici epicurei in cui il Sole era considerato grande come lo si vede dalla Terra, cioè molto piccolo, ed espone un modo di confutare tale opinione utilizzando diversi metodi tra cui quello di considerare le ombre. Innanzitutto Cleomede scrive che quando il bordo del Sole compare all'orizzonte, le ombre che si proiettano sono molto lunghe, e man mano che il Sole sale sull'orizzonte, queste diminuiscono considerevolmente. "Questo non accadrebbe se i raggi non fossero più elevati di tutti i corpi che ci sono sopra la Terra, e nemmeno se il Sole misurasse un piede, cosa impossibile perché in tal caso il circolo più grande del cielo dovrebbe misurare 750 piedi". Questa è la misura diretta del Sole e corrisponde all'idea epicurea, mentre Cleomede dice che il Sole è molto più grande. Sempre ragionando con le ombre, consideriamo

per esempio un portico posto in direzione nord-sud: si riscontra “che le ombre delle colonne si proiettano in forma parallela. Ciò non si produrrebbe se i raggi non fossero emessi in linea retta e se il diametro del Sole non si estendesse per tutta la grandezza del portico”. Inoltre si ha che le vie orientate in direzione dell'est equinoziale non hanno ombra all'uscita equinoziale del Sole. E quindi “la dimensione del Sole non si estende soltanto per la lunghezza [longitudine Est-Ovest] della Terra abitata, ma anche per la larghezza [latitudine Nord-Sud]”. E ancora, “il certo è che a Syene, quando il Sole è nel Cancro, gli oggetti illuminati sotto lo stesso meridiano non proiettano ombra in una zona dal diametro di trecento stadi”. Possiamo stimare questa misura in circa 45-50 km. Syene è la città dell'Egitto fondata da Tolomeo III tra il 246 e il 222 a.C.

Cleomede presenta diversi metodi per calcolare la dimensione minima del Sole; sono ragionamenti di vario tipo di cui il primo è del tutto intuitivo. Scrive Cleomede: “Immaginiamo di liberare un cavallo perché corra in campo aperto nello spazio di tempo che va dal momento che comincia a mostrarsi all'orizzonte il primo bordo del Sole fino a che è salito del tutto: sarà evidente, per chi sa calcolare, che il cavallo sarà avanzato non meno di dieci stadi [circa 1 km e mezzo], che un uccello dei più rapidi avanzerà molto più che il cavallo, e che una freccia che si sposta con grande velocità percorrerà molto più tracciato dell'uccello”. E quindi il Sole che è più lontano percorrerà ancora più spazio e quindi il suo diametro sarà ancora maggiore dello spazio percorso dalla freccia.

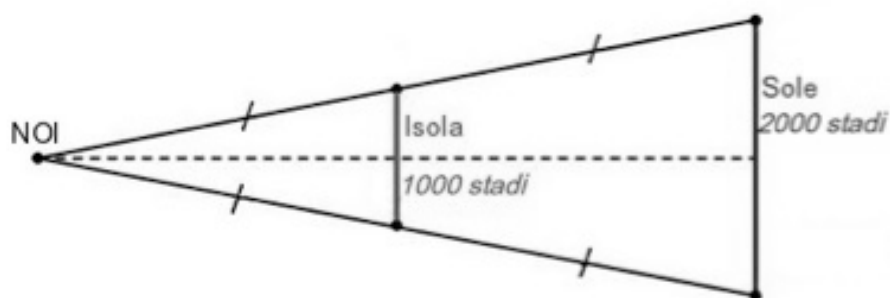


Fig. 1. La grandezza del Sole (v. Cléomède [1980]).

Il secondo metodo è molto più rigoroso (vedi Figura 1): “Immaginiamo ora di guardare una grande isola in lontananza, questa ci sembra così piccola che, quando il Sole sorge o tramonta, il suo bordo si vede da entrambi i lati dell'isola. Se la nostra vista abbraccia l'isola, il cono emesso dalla nostra vista avrà come base il diametro dell'isola. Pertanto, se il

diametro dell'isola è di 1000 stadi, la base del cono sarà della stessa dimensione. Immaginiamo anche che il Sole disti dall'isola quanto l'isola dista da noi. Quindi, posto che il bordo del Sole si vede da entrambi i lati dell'isola, i raggi lanciati dai nostri occhi in direzione del Sole, sono il doppio di quelli che arrivano all'isola, di maniera che la base di questo triangolo sarà anche il doppio del diametro dell'isola. Se questo diametro è di 1000 stadi, il diametro del Sole sarà di 2000 stadi. Però posto che la distanza non è uguale perché noi siamo meno lontani dall'isola e il Sole è molto più distante da lei, il diametro del Sole sarà per così dire infinitamente più grande rispetto al diametro dell'isola". Essendo quindi il Sole molto più lontano dell'isola dalla costa questo comporta che è anche molto più grande di come noi lo vediamo. È particolarmente rilevante che Cleomede abbia considerato un astro, il Sole, tanto grande e tanto lontano: infatti le misure del 'mondo' riportate da diversi autori classici di epoca romana parlano di un cosmo relativamente piccolo, che ne possa giustificare la rotazione diurna intorno alla Terra, ritenuta immobile al centro della rotazione.

Anche le osservazioni sulle ombre offrono riferimenti per la stima della grande distanza della Terra dal Sole. Nella stessa epoca in cui lavora Eratostene, in Cina si pensava che il fatto che le ombre fossero di diversa lunghezza in diversi punti della Terra dipendesse dal fatto che il Sole è molto vicino alla Terra e la Terra è piatta: quindi non in tutto il mondo si pensava ad una Terra sferica e si interpretavano nello stesso modo gli stessi fenomeni osservati, quali le diverse lunghezze delle ombre, in diversi paesi nello stesso momento. L'ipotesi della sfericità della Terra è una caratteristica della scienza ellenistica e del bacino del Mediterraneo. A proposito delle relazioni tra la Terra e il Sole, nel Mediterraneo e in Cina nella stessa epoca, il III secolo a. C., Rovelli scrive che nel Zhou Bi Suan Jing (il *Classico dell'Aritmetica*) che è uno dei più antichi testi di matematica cinese, si discute della variazione dell'altezza del Sole andando verso Sud. Basandosi sull'idea che la Terra sia piatta, lo Zhou Bi Suan Jing calcola che il Sole sia a circa 10.000 "li" sopra la nostra testa: poche migliaia di chilometri. Nello stesso periodo, Eratostene utilizza la stessa misura, ma si basa sull'idea che la Terra sia una sfera, e conclude che il Sole è lontanissimo e il perimetro del nostro pianeta è 252.000 'stadi', cioè 40.000 chilometri. Il contesto culturale della Cina della dinastia Han è molto diverso da quello del Mediterraneo Ellenistico, e culture diverse danno interpretazioni diverse della stessa osservazione. L'occidente continuerà a immaginare la Terra come una sfera e il Sole molto lontano e

grande; mentre la Cina continuerà a pensare che il Sole sia una pallina, e la Terra sia piatta. Verso la fine del 1500 arrivano in Cina i gesuiti, guidati da Matteo Ricci, colto astronomo. Quando i gesuiti vengono a conoscenza delle idee dell'Istituto Imperiale di Astronomia, sorridono. Quando i Cinesi ascoltano dai gesuiti le idee astronomiche occidentali, in brevissimo tempo rinunciano al proprio punto di vista, e adottano la prospettiva occidentale.

C'è una grande apertura di Cleomede ad ipotesi diverse, a nuove e future conoscenze rispetto a conoscenze che lui ammette di non avere. Infatti scrive: "Supponendo che un astro sia alla stessa distanza del Sole dalla Terra, se la sua dimensione apparente è di un dito, allora il suo diametro sarà la dodicesima parte del diametro del Sole. Però se sono distanti, la dimensione sarà proporzionale alla distanza. In maniera che non si può scartare la possibilità che qualche astro abbia la stessa dimensione del Sole o addirittura maggiore".

4. Cleomede riporta i metodi usati da Eratostene e da Posidonio per misurare la grandezza della Terra

Cleomede analizza i metodi di Eratostene, che nel III sec a.C. fa misure sul terreno confrontando le ombre a Alessandria e Syene, e di Posidonio, che guarda la stessa stella a Rodi e ad Alessandria. Il primo ha il problema dell'incertezza dell'individuazione della fine di un'ombra e il secondo presenta problemi di rifrazione e di visibilità di un astro, rispetto ad un orizzonte completamente libero e piano.

Sia Eratostene che Posidonio, seguono il metodo della logica stoica: adottano alcuni presupposti e successivamente passano alle dimostrazioni attraverso le conseguenze di questi presupposti. Ma si differenziano in quanto il primo utilizza un metodo di carattere più geometrico, mentre quello di Posidonio è molto più semplice nella sua struttura.

4.1. Il metodo di Posidonio

Posidonio prende in considerazione la stella Canopo (vedi Figura 2), una stella molto luminosa dell'emisfero celeste Sud, che non è visibile in Grecia, è appena sopra l'orizzonte di Rodi e invece ad Alessandria sale di 1/48 di giro e quindi raggiunge 7°30' sopra l'orizzonte verso sud. Posidonio quindi "...afferma che la stella più brillante chiamata Canopo, situata in direzione sud sopra il timone della Nave Argo, in Grecia è completamente invisibile, e per questo Arato [315 - 240 a.C.] non la cita nel suo *Phenomena*, mentre si vede a Rodi, dove è appena visibile sull'orizzonte. Ad Alessandria la stella, quando è esattamente in meridiano,

è elevata dall'orizzonte una quarta parte di un segno dello zodiaco, vale a dire $\frac{1}{4}$ di $\frac{1}{12}$ del cerchio intero, cioè $\frac{1}{48}$ della parte di meridiano che passa per Rodi ed Alessandria” [$\frac{1}{48} \times 360^\circ = \frac{1}{4} \times 30' = 7^\circ 30'$] (vedi Figura 3). “Poiché l'orizzonte degli abitanti di Rodi è a questa stessa distanza [cioè $7^\circ 30'$] dall'orizzonte degli abitanti di Alessandria e posto che la parte di Terra che si trova sotto questa sezione pare essere di 5000 stadi, le altre parti che si trovano sotto le altre sezioni sono anch'esse di 5000 stadi. Così si può sapere che il gran circolo della Terra è di 240.000 stadi, se e quando sarà certo che ci sono 5000 stadi tra Rodi ed Alessandria, altrimenti il risultato sarà proporzionale a tale distanza”: $5.000 \times 48 = 240.000$.

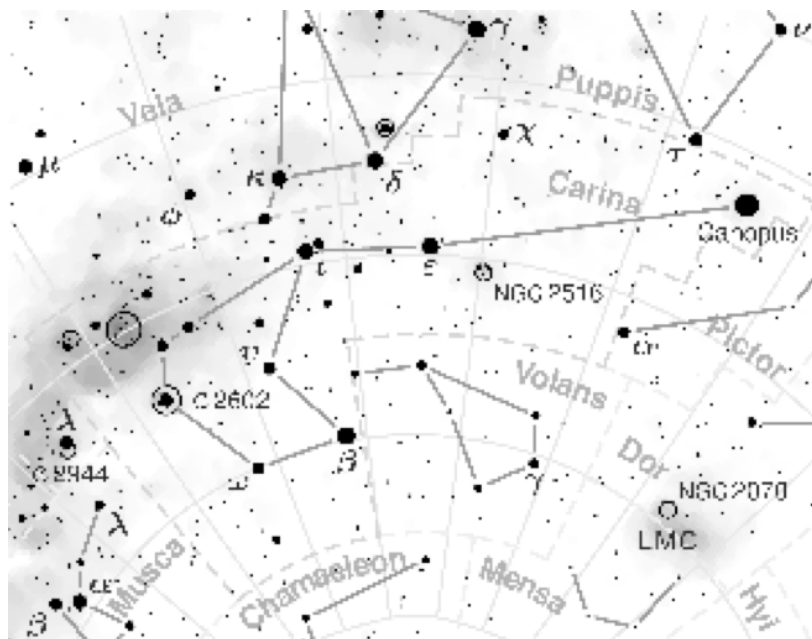


Fig. 2. La stella Canopo dell'emisfero Sud celeste, nella costellazione di Carina.

L'attenzione geometrica di Cleomede è notevole perché quella misura era calcolata attraverso viaggi in nave e non è facile sapere se una nave ha viaggiato esattamente lungo un meridiano, per cui quella distanza è incerta. Tanto che se invece tale distanza tra Rodi ed Alessandria valesse 3750 stadi, come afferma Eratostene, si avrebbero 180.000 stadi per l'intero cerchio del meridiano, e questo valore di 180.000 stadi è quello trasmesso da Strabone (60 a.C – 23 d.C.) e che in seguito accoglierà il geografo e astronomo C. Tolomeo nel II sec d.C.

4.2. Elementi del metodo di Posidonio

Conoscenze: 1) la terra è sferica; 2) Rodi ed Alessandria sono sullo stesso meridiano e distano 5000 stadi (circa 800 km) (vedi Figura 4); 3) dividendo in parti uguali grandezze uguali si ottengono parti uguali.

Osserviamo che Cleomede non nomina mai Talete direttamente ma cita “i geometri”.

Esperienze: la stella Canopo è osservata nella costellazione di Carena, parte della grande costellazione antica della Nave Argo, che non esiste più come costellazione unitaria; è invisibile nella Grecia continentale, è all'orizzonte a Rodi e arriva a $7^{\circ}30'$ sopra l'orizzonte ad Alessandria. La stella Canopo è infatti visibile a Sud della latitudine di 37°N . Tale esperienza è citata da Posidonio, ma Cleomede non sa se è stata fatta direttamente da lui.

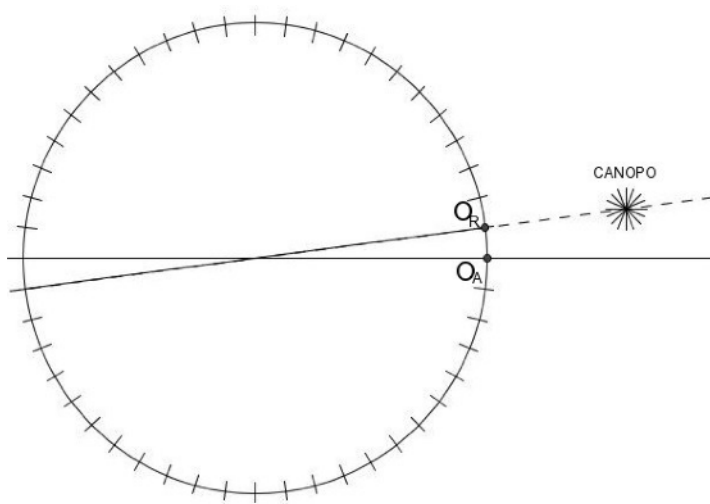


Fig. 3. La stella Canopo sull'orizzonte di Rodi (R) e di Alessandria (A) (v. Cléomède [1980]).



Fig. 4. Latitudine e longitudine delle città citate da Posidonio ed Eratostene.

4.3. Problematicità

Posidonio suppone che Rodi ed Alessandria si trovino sullo stesso meridiano, mentre hanno una differenza in longitudine di $1^{\circ}50'$, e suppone che distino 5000 stadi. Tale distanza è basata sulle giornate di traversate marine; Eratostene aveva calcolato tra le due località 3750 stadi, ma forse aveva trovato questa misura in modo indiretto. In letteratura si trovano altri elementi, tra cui il seguente che riporto, di E. Drabkin, che porterebbe ad una maggiore precisione, e con tali osservazioni si avrebbe un risultato più corretto: Canopo, al tempo di Posidonio, a Rodi, aveva un'elevazione di circa 1° sull'orizzonte; ad Alessandria, con la correzione per la rifrazione,

tale angolo era di $6^{\circ}16'$; la differenza tra le due località risulterebbe di circa 5° . In effetti oggi sappiamo che il Porto di Rodi ha latitudine $36^{\circ}26'$ e che Alessandria ha latitudine $31^{\circ}12'$ per cui la loro differenza risulta pari a $5^{\circ}14'$.

4.4. Il metodo di Eratostene

Conoscenze: 1) la terra è sferica; 2) Alessandria e Syene sono sullo stesso meridiano; 3) la distanza tra le due città è di 5000 stadi; 4) i raggi proiettati da distinte parti del Sole su distinte parti della Terra arrivano paralleli. *Conoscenze geometriche,* tra cui quanto dimostrato dai geometri: 1) linee rette che cadono sopra linee parallele producono angoli alterni uguali; 2) archi di circonferenza che insistono su angoli uguali sono simili, ovvero, mantengono la stessa proporzione e la stessa misura rispetto alla circonferenza alla quale appartengono (rispettivamente) (si veda Euclide) (vedi Figura 5).

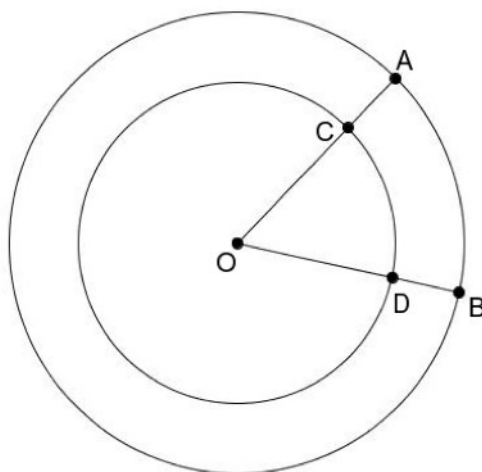


Fig. 5. Archi di circonferenza che insistono su angoli uguali sono simili (v. Cléomède [1980]).

Esperienze: 1) Syene è sul tropico d'estate; all'epoca di Eratostene l'obliquità dell'Eclittica era di $23^{\circ}43'20''$ mentre Eratostene trovò $23^{\circ}51'20''$; spesso si considerava pari a 24° (Dreyer 1970); 2) Eratostene fa un'esperienza di misura di distanza diretta, o forse invece usa dati della cartografia egiziana, da cui la distanza tra Syene e Alessandria risulta pari a 5.000 stadi; 3) Cleomede conferma ciò che afferma Eratostene, che Syene è situata sul Tropico d'Estate per cui il giorno del Solstizio d'Estate, quando il Sole passa per il meridiano cioè a mezzogiorno, il Sole si trova esattamente allo zenit, quindi gli gnomoni degli orologi solari non proiettano alcuna ombra. “Dicono che questo avviene in una circonferenza di 300 stadi di diametro. Ad Alessandria invece, alla stessa ora, gli

gnomoni degli orologi solari proiettano ombra, perché questa città è situata più a nord di Syene”.

Ci chiediamo ora quali tipi di orologi solari abbia usato Eratostene. Cleomede racconta come ha fatto Eratostene a misurare la circonferenza della Terra; poiché abbiamo perso il testo originale di Eratostene *La misura della Terra*, è questa di Cleomede l'opera più vicina al geografo alessandrino ed è l'unica opera che riporta integralmente il metodo da lui usato. In quasi tutte le vulgate, e nei testi di storia dell'Astronomia, si parla di un obelisco osservato da Eratostene ad Alessandria a mezzogiorno del Solstizio d'Estate che proietta un'ombra piana, e di un pozzo a Syene che in quel momento viene illuminato nel fondo. Ma Cleomede parla di un altro tipo di orologi solari: uno gnomone verticale a Syene e uno scafe, una semisfera usata nella sua parte concava, ad Alessandria. Questa è graduata all'interno in frazioni dell'intera circonferenza e permette così una misura indiretta dell'angolo al centro corrispondente, tanto che Cleomede non cita un valore di angolo, ma la frazione di 1/50 pari al rapporto tra la lunghezza dell'ombra nello scafe e la circonferenza totale di questo (Figura 6 e 7).

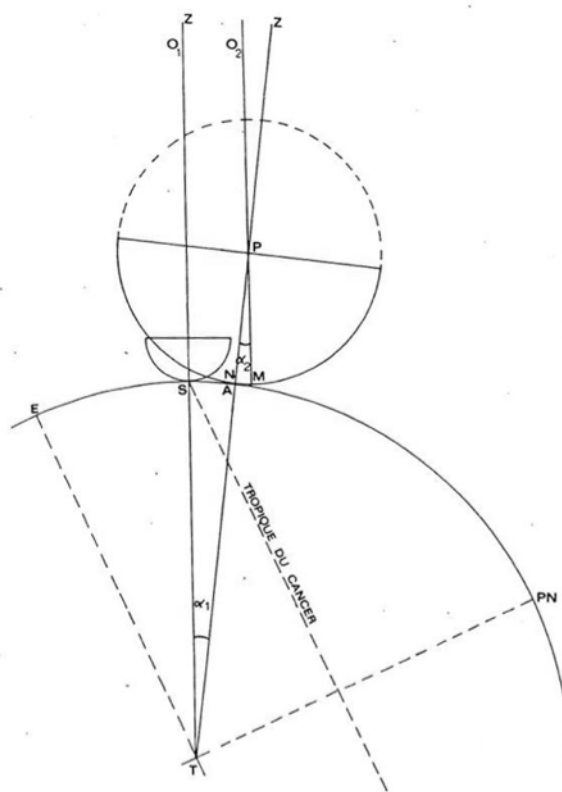


Fig. 6. E-S-A-PN: circonferenza della Terra di centro T (v. Cléomède [1980]).

Peraltro l'hemisferium, o scafe, è citato da Vitruvio (I secolo a.C.) nel *De Architectura* e il suo inventore viene individuato in Aristarco di Samo (310- 230 a.C.), anche se altri autori lo attribuiscono a Beroso di Babilonia

scafe e quella della Terra): “Pertanto, la relazione che c’è tra l’arco di circonferenza contenuto nell’emisfero concavo dell’orologio (MN) e la circonferenza totale corrispondente è la stessa che c’è tra l’arco che va da Syene ad Alessandria (SA) e la circonferenza totale corrispondente”.

Constatato che l’arco MN è la cinquantesima parte del cerchio intero è “del tutto necessario, quindi, che la distanza tra Syene ed Alessandria sia anche 1/50 del grande circolo della Terra; in effetti questa distanza è di 5.000 stadi. Il circolo completo è quindi di 250.000 stadi”.

Cleomede scrive che lo stesso procedimento vale nel giorno del Solstizio d’Inverno. In quel caso però servono due orologi solari, posti rispettivamente ad Alessandria e a Syene, ed entrambi proietteranno un’ombra nello scafe, ma ad Alessandria l’ombra sarà maggiore perchè è più distante di Syene dal Tropico d’Inverno. Leggendo le lunghezze delle due ombre se ne calcolerà la differenza e la si riporterà alla misura dell’angolo di distanza tra le due latitudini: si concluderà, anche in questo caso, che il gran circolo della Terra è di 250.000 stadi. In realtà questa misura si può fare in qualunque giorno dell’anno misurando i due archi e calcolando i due angoli a mezzogiorno, come detto sopra.

Il diametro della Terra, quindi, supererà gli 80.000 stadi, scrive Cleomede, perché questo diametro deve essere un terzo del gran circolo della Terra. Da cui si ha un valore di π greco poco maggiore di 3, perché con il valore pari a 3 si avrebbe: $250.000 : 3 = 83.333,3$.

4.5. Confronti tra Posidonio ed Eratostene

Cleomede scrive che è diversa per i due, Posidonio ed Eratostene, la distanza considerata tra Rodi e Alessandria: Posidonio la considera pari a 5.000 stadi ed Eratostene pari a 3.750 stadi. Il valore di 5.000 stadi, indicato in diverse circostanze potrebbe anche essere un numero tondo, arrotondato per essere usato in un esercizio o in una spiegazione qualitativa.

Drabkin suggerisce un’altra ipotesi, e cioè che Posidonio abbia usato una proposizione in cui Eratostene avrebbe affermato che il Sole allo zenit non produce ombre su un cerchio di 300 stadi di diametro (circa 45-50 km), e abbia effettuato una stima per il diametro osservato del Sole di 36’, cioè 1/600 della circonferenza, da cui si otterrebbe il valore per la circonferenza della Terra pari a $300 \times 600 = 180.000$ stadi.

Noi non sappiamo in realtà quale calcolo abbia fatto Posidonio, ma Strabone scrive che Posidonio, con la misura di 180.000 stadi, ha

rimpicciolito la Terra rispetto a quanto aveva trovato precedentemente Eratostene.

5. Problematicità

In base a quanto si evince dal testo di Cleomede rispetto agli orologi solari usati da Eratostene, Goldstein (1984) sostiene più probabile che Eratostene abbia usato il rapporto tra la lunghezza dell'ombra piana e lo gnomone verticale, al mezzogiorno del Solstizio d'Estate ad Alessandria, nota e pari a $1/8$. Avrebbe usato un metodo per approssimare le radici quadrate, e la riduzione di frazioni anche di numeri primi tra loro; avrebbe considerato un angolo di 15° e uno pari alla metà, cioè $7^\circ 30'$ pari a $1/48$ del cerchio intero, e, con la formula della bisezione dell'angolo già nota ad Archimede, avrebbe calcolato la tangente $\text{tang } 7^\circ 30' = \text{circa } 5/38$. Da cui si ha che

$$1/8 : 5/38 = y/ 1/48 \rightarrow y = 19/960 = 1/50,5 \text{ del cerchio}$$

che corrisponde ad un angolo di $7^\circ 12'$. Dove si ritrova che $1/8 = \text{tangente } 7^\circ 12' = \text{angolo tra le latitudini di Alessandria e Syene e } 50,5 \times 5.000 = 252.000$ stadi fornisce la misura dell'intera circonferenza. Cleomede riporta però la cifra di 250.000 stadi, per la misura della circonferenza della Terra calcolata da Eratostene, il che fa pensare ancora ad un'opera didattica o divulgativa, mentre altri autori quali Teone, Plinio e Strabone, riportano 252.000 stadi. Possiamo di nuovo avanzare diverse ipotesi:

1) o Cleomede ha arrotondato a 250.000 perché $250.000 : 5.000 \text{ stadi} = 50$ mentre $252.000 : 5.000 \text{ stadi} = 50,4$ e questo avvalorata la tesi che egli è un didatta e un divulgatore attento alla chiarezza del metodo più che alla correttezza dei dati e preferisce numeri interi;

2) oppure Eratostene ha aggiunto 2.000 stadi per avere un numero divisibile per 60 poiché per le sue misure usava l'hexacontade (h), cioè la sessantesima parte di un cerchio, e

- 250.000 stadi \rightarrow 1 hexacontade \leftrightarrow 4166,666 stadi
- 252.000 stadi \rightarrow 1 hexacontade \leftrightarrow 4200 stadi

Anche qui ci sono delle problematicità rispetto a quale valore è il più fedele, e quali conti abbia fatto realmente Eratostene. In sintesi si hanno i dati riportati in Tabella 1. In queste misure però entra in campo un altro problema, ossia quale valore si attribuisce alla misura dello stadio riportato in miglia romane e quindi poi in metri. La circonferenza di 240.000 stadi, basata su uno stadio che è $1/10$ di un miglio romano, dà 240.000 stadi $\times 1/10 = 24.000$ miglia romane, mentre la circonferenza di 180.000 stadi è basata su uno stadio che è $2/15$ del miglio romano, da cui, in miglia

romane, si ottiene lo stesso risultato: $180.000 \text{ stadi} \times 2/15 = 24.000 \text{ miglia romane}$.

Tab. 1. Circonferenza della Terra.

Misura di	Trasmissione	Dimensione (stadi)
forse Eudosso (408-355 a.C.)	Aristotele (384 - 322 a.C.)	400.000
forse Dicearco (350 - 290 a.C.)	Archimede (287 - 212 a.C.)	300.000
Eratostene (276/272-196/192 a.C.)	Cleomede (?)	250.000
Eratostene	Altri	252.000
Posidonio (135-50 a.C.)	Cleomede (?)	240.000
Posidonio	Strabone (ca. 60 a.C.–23 d.C.)	180.000
Tolomeo (100-175 d.C.)	Tolomeo	180.000

Resta pertanto incerta la misura dello stadio. Il valore accettato fino alla prima metà del ventesimo secolo è stato quello ottenuto da Hultsch su basi filologiche e pubblicato nel suo articolo del 1882 pari a 157,5 metri per uno stadio, mentre il valore diffuso oggi è quello di 185 metri, chiamato stadio Attico. Hultsch si basa sull'interpretazione di un passo di Plinio (N.H. 12.53): “Eratostene pose 40 stadi = 1 *σχοινος* (*schoinos*)”: 1 *schoinos* egizio = 6.300 metri, da cui 1 stadio = $6.300/40 = 157,5$ metri. Rawlins sostiene che il brano di Plinio sia stato frainteso in quanto vi si legge: “Eratostene operoso in ogni ricerca scientifica, ma soprattutto nelle ricerche geodetiche, trovò la circonferenza della Terra in 252.000 stadi ossia di 31.500 miglia della misura romana, risultato accertato da tutti, conseguito da lavoro improbo, ma con procedimento tanto rigoroso che è vergognoso non crederci”. Da cui 1 miglio Romano = $252.000 / 31.500 = 8$ stadi che corrisponde a 1 stadio = $1/8$ miglio Romano = 185 metri, ovvero lo stadio Attico.

Il valore trovato utilizzando il metodo di conversione proposto da Russo (2013) che ha analizzato i dati di longitudine di un cospicuo campione di città forniti da Tolomeo in una delle versioni a noi arrivate della *Geografia*, è per 1 stadio pari a 155,8 metri. La notevole somiglianza tra quanto trovato con tale metodo e il valore proposto da Hultsch, ne avvalorava il risultato ottenuto. Si hanno quindi le diverse possibilità riportate in Tabella 2 a seconda della misura adottata per lo stadio.

Il valore di Eratostene, 252.000 stadi, con il fattore di conversione di Hultsch di 157,5 metri per stadio, risulta la migliore approssimazione, qualsiasi delle tre misurazioni si prenda come riferimento per la circonferenza terrestre: 40.075,0166 km (diametro equatoriale),

39.940,65077 km (diametro polare), 40.041,46448 km (diametro medio). Molti autori sono peraltro concordi nell'affermare che Eratostene e Tolomeo hanno usato lo stesso stadio.

Tab. 2. Stima della circonferenza della Terra (in metri) per diversi valori dello stadio.

Autore	Misura (stadi)	157,5 m	155,8 m	185 m
Posidonio	240.000	37.800.000	37.392.000	44.400.000
Posidonio	180.000	28.350.000	28.044.000	33.300.000
Eratostene	250.000	39.375.000	38.950.000	46.250.000
Eratostene	252.000	39.690.000	39.261.600	46.620.000
Tolomeo	180.000	28.350.000	28.044.000	33.300.000

Altri elementi che rendono problematico questo aspetto della geografia antica possono essere ricondotti al valore incerto del rapporto tra circonferenza e diametro di un cerchio e alle imprecise localizzazioni geografiche dei luoghi considerati:

- 1) Quale è il valore di π usato da Cleomede? È pari o poco maggiore a 3 da quanto si ricava dal testo. Cleomede disponeva del valore calcolato da Archimede che lo pone tra $3+10/71$ e $3+10/70$?
- 2) Altro problema consiste nel fatto che in tutte queste misure le città considerate non sono in realtà sullo stesso meridiano. Si ha infatti una differenza di longitudine di $1,5^\circ$ tra Alessandria e Syene, le città considerate da Eratostene, e ancora maggiore e pari a 3° tra Rodi e Alessandria, considerate da Posidonio.
- 3) Syene, nelle epoche prese in considerazione, non era esattamente sul Tropico del Cancro, ma circa 35 km più a Nord.
- 4) Cleomede è un filosofo che descrive, e non un matematico che dimostra, anche se il suo testo è spesso complesso e assai sofisticato e articolato nella presentazione di diverse argomentazioni, sostenute da studiosi di diversi settori, a lui precedenti.

Bibliografia e riferimenti

Cleomede Caelestia [1990] Edidit Robert Todd, Leipzig, Teubner.

Cléomède [1980] *Théorie élémentaire (De motu circulari corporum caelestium)*, Texte présenté, traduit et commenté par R. Goulet. Paris, Vrin.

Cleomedes, *Dos libros sobre la contemplación de las órbitas Celestes*, F. Martín Casalderrey (Editore), R. Cot (Traduttore), J. Bergasa (Prologo), FESPM, Madrid (in stampa).

Drabkin I. E. (1943) *Posidonius and the circumference of the Earth*, Isis, Vol. 34, n. 6.

- Dreyer J. L. E. (1970) *Storia dell'astronomia da Talete a Keplero*, Feltrinelli, Milano.
- Dutka J. (1993) *Eratosthenes' measurement of the Earth reconsidered*, Archive for history of exact science, 20, vol. 46.
- Ferreri G. (2003) *L'ombra e la penombra di un elemento rettilineo. Alcune osservazioni*, Gnomonica Italiana, Febbraio 2003.
- Fischer I. (1975) *Another look at Eratosthenes' and Posidonius' Determinations of the Earth's Circumference*, Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society 16.
- Goldstein B. R. (1984) *Eratosthenes on the Measurement of the Earth*, Historia Mathematica, vol. 11, Novembre 1984.
- Labellarte G. (2015-2016) *La geografia matematica di Eratostene nell'opera di Cleomede*, Tesi di laurea magistrale in Matematica, Univ. "La Sapienza" di Roma, Relatrice N. Lanciano.
- Neugebauer O. (1975) *A history of ancient mathematical astronomy*, Springer Verlag, Berlino.
- Neugebauer O. (1941) *Cleomedes and the meridian of Lysimachia*, in American Journal of Philology 62.
- Rawlins D. (1982) *The Eratosthenes-Strabo Nile Map. It is the earliest surviving instance of spherical cartography? Did it supply the 5.000 stades arc for Eratosthenes' experiment?*, Archive for history of exact science, 24, vol. 26.
- Rovelli C. (2011) *Perché non tutte le teorie sono equivalenti*, La Repubblica, 27 settembre 2011. <http://giannivattimo.blogspot.it/2011/09/rovelli-conoscenza-e-certezza.html> martedì 27 settembre 2011 Rovelli, conoscenza e certezza - Ebbene sì, la terra è rotonda.
- Russo L. (2013) *L'America dimenticata*, Mondadori, Milano.